

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET HAUTES ENERGIES

Thèse de doctorat de l'Université Paris 6

Spécialité :

Physique Théorique

présentée par

Jean-François RICHARD

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet :

Diagramme de phase
du modèle de Potts bidimensionnel

*Soutenue le 19 Septembre 2006
devant le jury composé de*

<i>Messieurs</i>	Bernard DERRIDA	<i>Examineur</i>
	Henk HILHORST	<i>Examineur</i>
	Jesper JACOBSEN	<i>Directeur de thèse</i>
	Marco PICCO	<i>Directeur de thèse</i>
	Hubert SALEUR	<i>Rapporteur</i>
	Robert SHROCK	<i>Rapporteur</i>
	Jean-Bernard ZUBER	<i>Examineur</i>

Table des matières

Remerciements	7
Introduction	9
1 Généralités sur le modèle de Potts	13
1.1 Modèle de Potts	14
1.1.1 Présentation du modèle	14
1.1.2 Développement de Fortuin-Kasteleyn	15
1.1.3 Limites particulières du modèle	16
1.2 Dualité	17
1.2.1 Principe	17
1.2.2 Implications pour les réseaux carré et triangulaire	19
1.2.3 Développement en boucles	20
1.3 Modèles de Potts couplés	22
1.3.1 Modèles couplés via l'opérateur énergie	22
1.3.2 Modèle de Potts sur réseau triangulaire avec interaction à trois spins . . .	24
1.3.3 Modèles couplés avec interaction à trois spins	27
2 Caractérisation du comportement critique	29
2.1 Rappels sur l'invariance conforme	30
2.1.1 Invariance conforme	30
2.1.2 Opérateurs primaires	30
2.1.3 Modèles minimaux	33
2.1.4 Modèles parafermioniques	35
2.1.5 Conditions aux limites toroïdales	36
2.1.6 Conditions aux limites fixées	38
2.1.7 Théorème c	40
2.2 Matrice de transfert	40

2.2.1	Représentation en spins	40
2.2.2	Représentation en amas	42
2.2.3	Cas de la température nulle et de symétries additionnelles	44
2.2.4	Algèbre de Temperley-Lieb et représentation en boucles	45
2.2.5	Spectre de la matrice de transfert	45
2.3	Etude numérique de deux modèles de Potts couplés	48
2.3.1	Matrice de transfert	48
2.3.2	Charge centrale	48
3	Modèle de Potts pour Q générique	51
3.1	Modèle de Potts avec CL cycliques	52
3.1.1	Structure de la matrice de transfert	52
3.1.2	Décomposition de Z en $K_{1,2l+1}$	54
3.1.3	Généralisation : CL fixées	57
3.2	Autres interprétations des $K_{1,2l+1}$	59
3.2.1	Représentation en spins	59
3.2.2	Méthode algébrique	61
3.2.3	Equivalence entre méthode algébrique et méthode combinatoire	67
3.3	Limite continue	68
3.3.1	Diagramme de phase	68
3.3.2	Caractéristiques des points critiques	69
3.3.3	Intégrabilité	72
4	Modèles RSOS	75
4.1	Présentation du modèle RSOS	76
4.1.1	Définition	76
4.1.2	Généralisation	78
4.2	Cas des CL toroïdales	79
4.2.1	Diagramme de Pasquier	79
4.2.2	Dualité	81
4.2.3	Relations entre fonctions de partition	82
4.2.4	Modèles twistés	83
4.2.5	Implications sur les matrices de transfert	86
4.2.6	Limite continue	89
4.3	Modèle RSOS avec CL fixées	89
4.3.1	Fonction de partition	89

4.3.2	Calcul des $\chi_{1,2l+1}$	91
5	Modèle de Potts pour Q nombre de Beraha	93
5.1	Décomposition de Z en caractères	94
5.1.1	Recombinaison à p entier	94
5.1.2	Représentations de $U_q(sl(2))$ pour q racine de l'unité	96
5.1.3	Limite continue	97
5.2	Diagramme de phase dans le plan des températures complexes	98
5.2.1	Historique	98
5.2.2	Principe	100
5.2.3	Diagramme de phase du modèle d'Ising sur réseau carré avec des CL cycliques	101
5.2.4	Généralisation à p entier quelconque	105
5.2.5	Cas du réseau triangulaire	108
5.2.6	CL cycliques fixées	109
5.2.7	Conclusions	110
6	Cas de conditions aux limites toroidales	113
6.1	Etudes existantes sur les CL toroïdales	114
6.1.1	Méthode du gaz de Coulomb	114
6.1.2	Méthode algébrique	115
6.1.3	Méthode diagrammatique	116
6.2	Préliminaires mathématiques	117
6.2.1	Fonctions de partition restreintes	117
6.2.2	Structure de la matrice de transfert	118
6.2.3	Définition des $K_{l,D}$	119
6.2.4	Propriétés utiles du groupe cyclique C_l	121
6.3	Décomposition de la fonction de partition	122
6.3.1	Expression des K_l	122
6.3.2	Coefficients $b^{(l)}$	123
6.3.3	Décomposition des K_{l,P_l}	125
6.3.4	Développement de Z_j en K_{l,P_l}	126
6.4	Amplitudes des valeurs propres	127
6.4.1	Développement de Z en $K_{l,D}$	127
6.4.2	Formule compacte pour les amplitudes	129
6.5	Conclusion de l'étude	129

Conclusion et perspectives	131
Méthode de la résultante	133
Bibliographie	135
Articles	143

Remerciements

Les trois ans de thèse constituent une étape essentielle dans toute carrière scientifique. En effet, c'est durant ces années qu'on commence véritablement à se former à la recherche. Il est donc important que ces années se passent bien, ce qui a été mon cas. Le choix des directeurs de thèse a été à mon sens vital, encore plus que le choix du sujet. Connaissant Jesper Jacobsen et Marco Picco depuis le DEA, je savais que les avoir comme directeurs de thèse me serait favorable aussi bien sur le plan professionnel que sur le plan humain. Durant toute ma thèse, ils ont été constamment à mon écoute et très disponibles, et j'ai beaucoup appris d'eux. C'est tout d'abord à eux que vont mes remerciements. Je remercie également Jesus Salas, avec lequel j'ai beaucoup collaboré, pour sa compétence et sa gentillesse.

Je remercie aussi les membres de mon jury, à savoir Hubert Saleur, Robert Shrock, Jean-Bernard Zuber, Henk Hilhorst et Bernard Derrida.

Travaillant sur deux laboratoires, le LPTHE et le LPTMS, j'ai rencontré de nombreux chercheurs. Je dois dire que, à quelques exceptions près, tous les chercheurs de ces deux labos m'ont chaleureusement accueilli. Je remercie en particulier les directeurs successifs du LPTHE, à savoir Laurent Baulieu et Olivier Babelon, ainsi que le directeur du LPTMS, Stéphane Ouvry. Je tiens aussi à remercier ceux qui ont partagé mon bureau. Au LPTHE, il s'agissait de Kyril Kazymyrenko. Au LPTMS, il s'agissait de Nicolas Bilas, Yacine Ikhlef, Jérôme Roccia et Mélanie Lebental. Je remercie également Thierry Mora et Gunnar Möller. Merci à vous tous, on a bien ri ensemble. Je remercie aussi les camarades normaliens qui m'ont aidé, à savoir Pierre Averbuch, Wladimir Mercouroff, Bernard Cagnac et Jean-Noël Verpeaux.

Il est important en marge de la vie professionnelle d'avoir une vie privée agréable. Je remercie ma mère, Françoise, ainsi que mon petit frère, Jean-Philippe, pour m'avoir soutenu durant ma thèse, et plus généralement pour tout ce que j'ai entrepris dans ma vie. Je remercie aussi les amis que j'ai. Tout d'abord, Julien Siebert, que j'ai rencontré lors de sa thèse au LPTHE, et avec qui je ne compte plus le nombre de films qu'on a vus. Je remercie également les amis que je m'étais fait en classes préparatoires, il y a déjà neuf ans, et que je continue de voir aujourd'hui, à savoir Julien Glaziou et Emmanuel Zinszner. Je remercie enfin les femmes avec lesquelles je suis sorti durant ma thèse.

Introduction

Le modèle de Potts est l'un des modèles les plus utilisés en physique statistique afin de décrire le comportement des corps magnétiques [1]. Il correspond à modéliser ces corps comme des spins à Q états situés aux noeuds d'un réseau et interagissant entre voisins de façon à s'aligner pour un corps ferromagnétique, ou bien à être en opposition pour un corps antiferromagnétique, selon le signe de la constante de couplage K . Même s'il ne s'agit que d'une simplification grossière, on s'attend à ce qu'on obtienne les exposants critiques mesurés expérimentalement, du fait de l'universalité. Le modèle de Potts est une généralisation du modèle d'Ising [35] au cas où les spins ont plus que deux composantes. Historiquement, une version à quatre composantes a été étudiée par Ashkin et Teller [36], mais le modèle à Q général fut proposé par Domb en 1951 comme sujet de thèse à son étudiant Potts [34]. Il fut aussi considéré indépendamment par Kihara et des collaborateurs en 1954 [71]. On se restreint dans cette thèse au cas d'un réseau régulier de dimension deux, avec des couplages constants.

L'intérêt de ce modèle est qu'il est relié à un grand nombre de problèmes en physique statistique et en mathématique, que nous expliciterons au cours de ce mémoire. Un développement en amas ou en boucles permet ainsi d'étendre le modèle à des valeurs de Q non entières et de considérer des limites particulières. Citons par exemple le problème de percolation de liens (on colore les liens d'un réseau avec une certaine probabilité et on se demande s'il y a un chemin colorié traversant le réseau) correspondant à la limite $Q \rightarrow 1$, ou bien la limite $Q \rightarrow 0$ dans laquelle seuls les arbres couvrants (sous-graphes connexes couvrant tous les sites du réseau et n'ayant pas de circuit) contribuent à la fonction de partition [45]. On peut considérer aussi des valeurs particulières du couplage K . Ainsi, le modèle à $K = -\infty$ décrivant un antiferromagnétique à la température nulle est lié à un problème de coloriage, la fonction de partition dans cette limite étant égale au nombre de façons de colorier le réseau avec Q couleurs de manière à ce que deux sites voisins n'aient pas la même couleur.

Ces liens avec d'autres problèmes expliquent la grande richesse du diagramme de phase du modèle. Pour Q plus grand que quatre, il y a uniquement une transition du premier ordre. Par contre, lorsque Q est inférieur ou égal à quatre, le diagramme de phase devient beaucoup plus complexe et il y a plusieurs transitions de phase du deuxième ordre. Nous nous intéresserons à la structure de ce diagramme. Plusieurs voies différentes ont permis de comprendre partiellement le diagramme de phase du modèle, ces voies ayant été développées à partir des années 70 où le modèle de Potts a commencé à être beaucoup étudié. Elles consistent à travailler sur un réseau discret de taille finie et à écrire des égalités exactes entre fonctions de partition, puis à prendre la limite thermodynamique afin de déduire des résultats sur le diagramme de phase. Des développements en série de fonctions de partition ainsi que des considérations de dualité ont permis de localiser simplement certains points critiques. De plus, les travaux de Baxter, utilisant l'intégrabilité, ont permis de calculer exactement l'énergie libre pour certaines valeurs

des paramètres [37].

Une autre approche, complémentaire de la précédente, est de considérer la limite continue du modèle, et d'utiliser la théorie conforme des champs. D'après une idée de Polyakov datant de 1970 [62], un système subissant une transition de phase du second ordre est invariant non seulement sous les dilatations globales mais aussi *locales*. Ce n'est qu'en 1984 que cette remarque sera utilisée pleinement [8]. En dimension deux, cette invariance, appelée invariance conforme, a d'importantes implications, car le groupe de symétrie a alors un nombre infini de générateurs. En considérant les représentations de ce groupe, on peut déterminer les caractéristiques de certaines transitions de phase. Nous exposerons les liens entre cette approche de limite continue et celles consistant à travailler avec un réseau discret.

Une transition du modèle de Potts particulièrement intéressante est située dans la région antiferromagnétique et appelée transition de Berker-Kadanoff. Cette appellation est due au fait que Berker et Kadanoff avaient prouvé théoriquement qu'il est possible d'avoir une phase basse température où les corrélations décroissent algébriquement avec la distance [58]. Le modèle de Potts est un exemple où une telle phase existe : nous verrons que dans toute une gamme de température le système a un comportement à grande distance décrit par un point fixe attractif en température.

Cependant, lorsque Q prend certaines valeurs particulières, appelées nombres de Beraha, cette phase n'existe pas. Ces nombres ont été introduits par Beraha comme limites de zéros de polynômes chromatiques [61], et jouent un rôle particulier car le diagramme de phase du modèle est changé lorsque le nombre d'états vaut un de ces nombres. Ce fait est d'autant plus important que les valeurs de Q entières (et donc expérimentales) sont des nombres de Beraha, ce qui explique pourquoi la phase de Berker-Kadanoff n'a jamais été observée expérimentalement. Nous verrons les raisons profondes pour lesquelles le diagramme est modifié.

La thèse est organisée comme suit. Le modèle de Potts est présenté dans le chapitre 1, d'après la review faite par Wu en 1982 [1]. Il est aussi relié à des problèmes mathématiques, notamment à des coloriage de réseaux. On donnera aussi la formulation équivalente du modèle en termes d'amas, obtenue par Fortuin et Kasteleyn [2],[3], qui permet de l'étendre à un nombre d'états Q non entier. Nous ferons aussi le lien entre des modèles de Potts définis sur différents réseaux en utilisant des transformations de dualité. Initialement ce sont Kramers et Wannier qui ont en 1941 considéré des transformations de dualité pour un modèle d'Ising planaire [74]. Ces transformations permettent de déterminer simplement la position des points fixes [73]. Il est intéressant aussi de considérer des modèles de Potts couplés, dans l'espoir d'obtenir des points critiques appartenant à des nouvelles classes d'universalité. Le cas de modèles de Potts couplés sur réseaux carrés a été étudié par Jacobsen [6]. Le cas de modèles de Potts couplés sur réseaux triangulaires est plus complexe, le réseau triangulaire n'étant pas autodual. C'est ce que nous étudions dans [5]. La méthode standard de dualité suivie par une décimation s'avère peu pratique, même dans le cas de seulement deux modèles couplés. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers une autre technique qui utilise un système de boucles couplées, généralisant les travaux de Wu et Lin [7]. En prime, cette technique permet de considérer des interactions à trois spins situées un triangle sur deux. Ces interactions génèrent des solutions autoduales non triviales.

Belavin, Polyakov, et Zamolodchikov ont montré que l'avantage de se placer en deux dimensions, c'est-à-dire de considérer des surfaces, est que l'invariance conforme, symétrie que possède le système à un point fixe dans la limite continue, impose de nombreuses contraintes, et

permet de classifier les types possibles de points critiques, en considérant les représentations de l'algèbre de Virasoro [8]. Les réseaux étant par définition discrets, les résultats ne s'appliquent pas tels quels. Cependant, en introduisant une matrice de transfert, qui joue un rôle analogue à un opérateur d'évolution dans la limite continue, et en considérant son spectre à un point critique, on arrive à déduire les caractéristiques de ce dernier, comme expliqué dans le chapitre 2. En particulier, la variation de la charge centrale effective avec la taille permet de voir comment le système se comporte sous renormalisation : il s'agit de renormalisation phénoménologique, introduit par Nightingale [75].

Nous exposons chapitre 3 le diagramme de phase du modèle pour un nombre d'états Q générique (inférieur ou égal à quatre) et des conditions aux limites cycliques, en utilisant un développement de la fonction de partitions en caractères $K_{1,2l+1}$. Ce développement peut être établi de plusieurs façons différentes. Les premiers à l'avoir obtenu sont Pasquier et Saleur [16]. Leur méthode est algébrique, elle consiste à passer par un modèle à six vertex équivalent, et à utiliser les représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb. Pour les déterminer, ils utilisent que cette algèbre est le commutant du groupe quantique $U_q(sl(2))$, déformation de $U(sl(2))$ pour un paramètre q défini par $\sqrt{Q} = q + q^{-1}$. Chang et Shrock ont réobtenu ce développement en raisonnant dans la représentation en spins [43]. Nous avons développé une nouvelle méthode [51], purement combinatoire. On utilise la matrice de transfert généralisée dans la représentation en amas. En dénombrant les connectivités compatibles avec une configuration d'amas donnée, on obtient bien le développement. Nous donnons une nouvelle interprétation des coefficients du développement, les termes en Q^j correspondant à des fonctions de partition restreintes à j amas non triviaux. De plus, notre méthode présente l'avantage d'être généralisable à d'autres conditions aux limites, par exemple des conditions aux limites cycliques fixées [51], ou bien comme nous le montrerons dans le chapitre 6 des conditions aux limites toroïdales [53].

La représentation en amas n'est cependant plus avantageuse lorsque le nombre d'états prend certaines valeurs particulières, à savoir des nombres de Beraha, et il est alors préférable d'utiliser une représentation en hauteurs, appelée modèle RSOS. Les modèles RSOS et leur équivalence avec le modèle de Potts ont été considérés par Pasquier [72],[23]. Cependant, comme l'a montré Pasquier, le modèle RSOS n'est pas exactement équivalent au modèle de Potts pour des raisons topologiques, les amas non triviaux n'ayant pas les mêmes poids. Cela nous a poussé à comparer les spectres des matrices de transfert des deux modèles lorsque la géométrie est toroïdale [21]. Les résultats sont exposés dans le chapitre 4. Nous avons trouvé numériquement que les spectres des matrices de transfert étaient très proches. Afin d'interpréter ce résultat, nous démontrons des égalités exactes entre les fonctions de partition des modèles, en utilisant des diagrammes introduits par Pasquier [23] qui traduisent visuellement la topologie des configurations d'amas. Ensuite, nous exposons les résultats de Saleur et Bauer [18] sur le modèle RSOS avec des conditions aux limites transverses fixées, en exprimant les fonctions de partition correspondantes $\chi_{1,2l+1}$ en fonction des $K_{1,2l+1}$.

Cela nous permet dans le chapitre 5 d'étudier le diagramme de phase du modèle de Potts pour un nombre d'états égal à un nombre de Beraha. Le développement en caractères se simplifie, les $\chi_{1,2l+1}$ jouant le rôle de caractères minimaux. Pasquier et Saleur ont montré que cette simplification a une interprétation profonde à l'aide de la théorie des représentations de $U_q(sl(2))$, pour q racine de l'unité [16]. Saleur en a déduit que la phase de Berker-Kadanoff disparaissait lorsque Q est égal à un nombre de Beraha [17], et qu'ainsi le diagramme de phase était modifié dans la zone antiferromagnétique. Afin de caractériser ce diagramme de phase, nous avons étudié numériquement les zéros de la fonction de partition dans le plan de température

complexe, et avons conjecturé des propriétés du diagramme [22]. Nous montrons en particulier que les points fixes qui existaient pour Q générique sont toujours des points fixes lorsque Q est un nombre de Beraha, mais que leurs propriétés ne sont pas les mêmes. De plus, de nouveaux points fixes apparaissent.

Nous terminons dans le chapitre 6 par étudier le modèle de Potts pour des conditions aux limites toroïdales et non plus cycliques. afin de savoir si cet effet est dépendant ou non des Cela est intéressant, car on ne sait pas si dans la zone antiferromagnétique il y a toujours disparition de la phase de Berker-Kadanoff aux nombres de Beraha pour conditions aux limites toroïdales et non plus cycliques. Du fait d'une topologie plus complexe des amas, ce cas est d'ailleurs beaucoup plus compliqué que le cas des CL cycliques, et a été moins étudié. Une approche utilisant le gaz de Coulomb, initiée par Di Francesco, Saleur et Zuber [29], puis étendue par Read et Saleur [130], permet d'obtenir une décomposition de la fonction de partition valable pour un modèle de Potts critique dans la limite continue. Cependant, il semble que les amplitudes obtenues sont en fait valables pour un modèle discret à n'importe quelle température, bien que jusqu'à présent il n'y ait pas eu de preuve. Une approche algébrique, utilisant l'algèbre de Temperley-Lieb périodique, est possible, et a été effectuée entre autres par Martin et Saleur [132],[131]. Cependant, les représentations de cette algèbre sont compliquées. Une bonne revue sur l'algèbre de Temperley-Lieb et ses généralisations a été donnée par Nichols [19]. Chang et Shrock [46], en raisonnant dans la représentation en spins, ont obtenu des relations sur les amplitudes ainsi que leurs expressions explicites pour des tailles petites, mais n'ont pas trouvé les expressions de toutes les amplitudes. Nous avons donc utilisé une extension de notre méthode combinatoire, qui tient compte de la topologie des amas non triviaux sur le tore [53]. Cela nous a permis de démontrer, à l'aide du groupe cyclique C_L , que la formule de Read et Saleur [130] est valable pour n'importe quel réseau et température.

En résumé, les résultats nouveaux de cette thèse sont les suivants. Nous avons déterminé les équations d'autodualité pour deux ou trois modèles de Potts couplés, définis sur réseau triangulaire et avec ou sans interactions à trois spins. Ces équations, publiées dans [5], sont données à la fin de la sous-section 1.3.1 et dans la sous-section 1.3.3. Dans [5], nous avons également étudié numériquement deux modèles couplés sans interaction à trois spins. La procédure utilisée et les résultats sont donnés dans la section 2.3. Dans [21], nous avons comparé les matrices de transfert du modèle RSOS et du modèle de Potts et établi des relations exactes entre les fonctions de partition de ces deux modèles, pour des CL toroïdales. Nous exposons ces relations dans la section 4.2. Dans [22], nous avons étudié le diagramme de phase dans le plan des températures complexes du modèle de Potts avec des CL cycliques ou cycliques/fixées, lorsque Q vaut un nombre de Beraha. Les résultats obtenus sont donnés dans la section 5.2. Dans [51], nous avons donné une nouvelle méthode combinatoire pour décomposer en caractères la fonction de partition du modèle de Potts avec des CL cycliques, et prouvé que notre approche était équivalente aux autres approches. La méthode est présentée dans la sous-section 3.1.2. L'avantage de cette méthode est qu'elle se généralise au cas de CL cycliques/fixées, comme exposé dans la sous-section 3.1.3. L'équivalence de notre décomposition avec celles déjà existantes est démontrée dans la sous-section 3.2.3. Dans [53], en considérant les permutations possibles entre ponts, nous avons étendu la méthode au cas de CL toroïdales et en particulier retrouvé la formule de Read et Saleur sur les amplitudes des valeurs propres [130], mais dans un cadre très général. Cela fait l'objet du chapitre 6.

Chapitre 1

Généralités sur le modèle de Potts

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord dans la section 1.1 le modèle de Potts à Q états en donnant sa définition en spins et en amas. Nous suivons la présentation faite par Wu [1]. La définition en amas, associée au développement de Fortuin-Kasteleyn [2],[3] permet de considérer des valeurs de Q quelconques, i.e. pas forcément entières. Nous terminons la section en exposant les liens entre le modèle de Potts et de nombreux problèmes classiques de la physique statistique. Nous insisterons en particulier sur les travaux de Beraha [61],[80], qui ont montré que les nombres B_p définis par :

$$B_p = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right) \quad (1.1)$$

avec p entier supérieur ou égal à 2 jouaient un rôle particulier dans les problèmes de coloriage. Nous verrons dans le chapitre 5 que lorsque le nombre d'états Q est égal à l'un de ces nombres de Beraha, le diagramme de phase du modèle de Potts est modifié. Notons que B_4 vaut 2 et correspond au modèle d'Ising, B_6 vaut 3 et correspond au modèle de Potts à trois états, tandis que B_∞ vaut 4.

Ensuite, nous considérons dans la section 1.2 des transformations de dualité, qui permettent dans les cas favorables de déterminer la position des points critiques. Notamment, dans le cas d'un réseau triangulaire, contrairement au cas d'un réseau carré, tous les points critiques sont autoduaux. Nous nous bornons à donner les principaux résultats, une présentation exhaustive sur la dualité ayant été faite par Savit [73]. Puis nous exposons le développement en boucles du modèle de Potts, inventé par Baxter, Kelland et Wu [28], et que nous utiliserons beaucoup dans les prochains chapitres.

Finalement, dans la section 1.3, nous nous intéressons à des modèles de Potts couplés via l'opérateur énergie. Jacobsen a établi les relations de dualité pour un réseau carré, dans le cas de deux ou trois modèles couplés dans [91] puis pour un nombre quelconque de modèles dans [6]. Nous nous sommes intéressés au cas de plusieurs modèles couplés sur réseau triangulaire, car nous nous attendions à ce que tous les points critiques soient autoduaux dans ce cas, par analogie avec un seul modèle. Nous avons publié nos résultats dans [5]. En combinant la procédure de Jacobsen avec une généralisation de la procédure de décimation, nous avons déterminé les équations d'autodualité dans le cas de deux modèles couplés. Cependant, cette méthode est lourde, et nous avons donc procédé de façon plus astucieuse. Pour cela, nous avons généralisé les travaux de Wu et Lin [7] qui portaient sur des transformations de dualité à l'aide d'un modèle de boucles pour un modèle défini sur réseau triangulaire avec des interactions à trois

spins situées un triangle sur deux. Cela nous permet d'avoir des calculs plus simples et de considérer éventuellement des interactions à trois spins. Dans [5], nous donnons les équations d'autodualité pour deux ou trois modèles couplés avec des interactions à trois spins.

1.1 Modèle de Potts

1.1.1 Présentation du modèle

Le modèle de Potts consiste en une généralisation du modèle d'Ising à des spins ayant plus de deux états possibles. Il a été introduit par Domb et Potts en 1951 [34], et fut aussi considéré indépendamment par Kihara et des collaborateurs en 1954 [71]. Il s'agit d'une généralisation du modèle d'Ising [35] au cas où les spins ont plus que deux composantes. Il est beaucoup étudié, son diagramme de phase étant extrêmement riche et pas encore totalement déterminé à l'heure actuelle. Nous suivons la présentation faite par Wu [1].

L'hamiltonien correspondant à une configuration de spins σ est donné par :

$$-\beta H = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad (1.2)$$

où les σ_i sont des spins prenant Q valeurs possibles, à savoir $0, 1, \dots, Q-1$, et qui sont situés sur les noeuds d'un réseau G (qui sera par la suite bidimensionnel, et carré ou triangulaire). La somme porte sur les liens $\langle ij \rangle$ de G , et $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$ est le symbole de Kronecker : il vaut 0 si σ_i et σ_j sont dans deux états différents et 1 s'ils sont dans le même état. K est la constante de couplage du modèle : pour $K > 0$ le modèle décrit des corps ferromagnétiques, les configurations avec les spins dans le même état étant énergétiquement favorables, tandis que pour $K < 0$ il décrit les antiferromagnétiques. La fonction de partition est donnée par :

$$Z = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H) = \sum_{\sigma} \prod_{\langle ij \rangle} \exp(K \delta(\sigma_i, \sigma_j)) \quad (1.3)$$

où la somme porte sur toutes les configurations possibles de spins σ . On donne donc un poids $\exp K$ lorsque deux spins voisins sont dans le même état, et 1 sinon. L'énergie libre f par spins est donnée par $\beta f = -\frac{\ln Z}{S}$, S étant le nombre total de spins, c'est-à-dire le nombre total de sites de G .

Le paramètre d'ordre du système est relié à la valeur moyenne du spin, et comme dans le cas d'Ising peut être obtenu en introduisant un champ h qui favorise une valeur donnée des spins, par exemple 0 :

$$-\beta H(Q, K, h) = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + h \sum_i \delta(\sigma_i, 0). \quad (1.4)$$

La valeur moyenne du spin M est $\frac{df(Q, K, h)}{dh}$. Le paramètre d'ordre m , égal à 0 pour un système complètement désordonné et à 1 pour un système complètement ordonné, est défini comme

$$m = \frac{QM - 1}{Q - 1}. \quad (1.5)$$

Pour $Q > 4$, le système a uniquement une transition de phase du premier ordre, c'est-à-dire avec discontinuité de m , lorsque K varie, correspondant à une transition ferromagnétique. Par contre, pour $Q \leq 4$, les transitions de phase sont du deuxième ordre, et le diagramme de phase est beaucoup plus riche [39]. Dans toute la thèse, on se restreint donc au cas $Q \leq 4$.

1.1.2 Développement de Fortuin-Kasteleyn

Le développement de Fortuin-Kasteleyn consiste à écrire Z comme une sommation sur des poids de configurations d'amas vivant sur le réseau G [2],[3]. Pour cela, on développe $\exp K\delta(\sigma_i, \sigma_j)$ comme :

$$\exp(K\delta(\sigma_i, \sigma_j)) = 1 + v\delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad (1.6)$$

avec :

$$v = \exp(K) - 1. \quad (1.7)$$

v est directement relié à la constante de couplage K , et on l'appellera paramètre de température, ou plus simplement température. En effet, il faut noter que β est contenu dans K , cf. Eq. (1.2). D'après l'Eq. (1.3), on a :

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + v\delta(\sigma_i, \sigma_j)). \quad (1.8)$$

En développant les produits, on obtient une somme de termes contenant des 1 et des $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$. On représente chaque terme de la manière suivante : on colore le lien $\langle ij \rangle$ si le terme contient $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$, on ne le colore pas sinon. A chaque terme on a donc associé une configuration d'amas vivant sur G . Pour chaque configuration, la sommation sur les configurations possibles de spins donne un facteur Q par composante connexe (i.e. par amas), car les spins peuvent prendre Q valeurs et doivent être identiques lorsqu'ils sont reliés par les amas. On obtient finalement le développement de Fortuin-Kasteleyn :

$$Z = \sum_{G' \subseteq G} v^{b(G')} Q^{n(G')}. \quad (1.9)$$

La somme porte sur les configurations d'amas G' possibles sur G . $b(G')$ et $n(G')$ sont respectivement le nombre de liens et le nombre de composantes connexes de G' , i.e. le nombre d'amas distincts de G' , sites isolés inclus.

Le développement de Fortuin-Kasteleyn est avantageux car Q n'intervient que comme un paramètre : Z est un polynôme en Q de degré S et en v de degré B , S et B étant respectivement le nombre de sites et le nombre de liens du réseau G . Il permet donc d'étendre la définition du modèle de Potts à des valeurs complexes de Q et de v , tandis qu'avec la définition en spins, Q était un entier. Nous nous intéresserons dans la suite à des valeurs réelles positives de Q , inférieures à 4. En définissant q et p comme

$$\sqrt{Q} = q + q^{-1} = 2 \cos \frac{\pi}{p} \quad (1.10)$$

nous verrons que lorsque p est entier, c'est-à-dire lorsque q est racine de l'unité, le diagramme de phase du modèle est particulier.

Le développement de Fortuin-Kasteleyn permet également de relier le modèle de Potts à d'autres modèles, ainsi qu'à effectuer des transformations de dualité, comme nous le verrons dans la sous-section 1.2.1. Notons aussi qu'on a effectué un développement sur les liens, mais qu'on peut aussi décomposer le réseau en morceaux plus larges, tout en mettant des interactions plus compliquées. Un exemple sur réseau triangulaire, effectué par Wu et Lin [7], sera donné dans la sous-section 1.3.2.

1.1.3 Limites particulières du modèle

Le modèle de Potts a été beaucoup étudié. Le cas où $K = -\infty$, i.e. $v = -1$, correspond à un problème de coloriage de G avec Q couleurs pour Q entier. En effet, d'après l'Eq. (1.3), dans ce cas seules les configurations où tous les spins voisins sont dans des états différents contribuent, et ce avec un poids égal à 1. $Z(Q, K = -\infty)$ est donc le nombre de façons de colorier les sites du réseau G avec Q couleurs de manière à ce que des sites voisins aient des couleurs différentes. $Z(Q, K = -\infty)$ est appelé polynôme chromatique, car c'est un polynôme en Q , et on peut donc le prolonger à des valeurs réelles de Q , comme expliqué précédemment. On le note $P(Q)$. Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier G est noté $\chi(G)$, et est appelé le nombre chromatique de G . Tous les Q entiers inférieurs à $\chi(G)$ sont donc des racines de $P(Q)$. Pour un réseau carré et un réseau hexagonal, $\chi(G) = 2$: ces réseaux sont bipartites, i.e. décomposables en deux sous-réseaux. Pour un réseau triangulaire, $\chi(G) = 3$: le réseau est tripartite. La détermination des polynômes chromatiques, correspondant à un calcul d'entropie, a intéressé beaucoup de physiciens et mathématiciens [47]. Notons d'ailleurs que le modèle de Potts à $v = -1$ viole la troisième loi de la thermodynamique, du fait de la multiplicité des états fondamentaux [48],[49].

Un problème intéressant a été de savoir si tout réseau planaire est coloriable avec quatre couleurs. Ce théorème des quatre couleurs a été prouvé par Appel et Haken [81],[82]. Cependant, la preuve n'a pas encore été complètement acceptée, car elle contient une partie informatique, et une partie de vérification à la main longue et peu passionnante. De plus, il est troublant qu'on puisse construire une série de réseaux telle que 4 est un point d'accumulation des zéros du polynôme chromatique. Ce résultat a été montré par Beraha [80]. Le théorème des quatre couleurs est donc "presque faux". Plus généralement, il a conjecturé que les nombres $B_p = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$ avec p entier supérieur ou égal à 2 sont des points d'accumulation des zéros de polynômes chromatiques [61]. Notons que B_4 , B_6 et B_∞ valent respectivement 2, 3, et 4. Nous exposerons dans le chapitre 5 les raisons pour lesquelles le modèle de Potts est particulier lorsque le nombre d'états Q vaut un de ces nombres.

La percolation de liens est aussi reliée au modèle de Potts. Une revue sur les problèmes de percolation de liens a été donnée par Essam [117]. Kasteleyn et Fortuin sont les premiers à avoir vu le rapport entre les deux modèles [2]. Stephen [118] puis Wu [119] ont ensuite explicité ce rapport. Nous donnons ici un argument simple, pris dans [30]. On considère un réseau G , chaque lien ayant une probabilité p d'être occupé et $1 - p$ d'être vacant. On a donc des configurations d'amas G' , ayant une probabilité $p^{b(G')}(1 - p)^{B-b(G')}$. La fonction de partition est donc :

$$Z_p = \sum_{G' \subseteq G} p^{b(G')} (1 - p)^{B-b(G')} . \quad (1.11)$$

On voit alors que Z_p est relié à la fonction de partition du modèle de Potts pour un paramètre de température v tel que $v = \frac{p}{1-p}$ et un nombre d'états $Q = 1$. En effet, d'après l'Eq. (1.9) :

$$Z_p = (1 - p)^B Z \left(Q = 1, v = \frac{p}{1 - p} \right) \quad (1.12)$$

à une normalisation près, les configurations d'amas ont donc le même poids dans les deux modèles. On dit que la percolation correspond à la limite $Q \rightarrow 1$ du modèle de Potts.

Il est intéressant de considérer également la limite $Q \rightarrow 0$ du modèle de Potts. Une première manière de procéder est de prendre cette limite à v fixé. Dans ce cas, d'après l'Eq. (1.9), on ne

garde que les configurations d'amas ayant une valeur minimale de n : les configurations d'amas avec $n = 1$ (le réseau G étant supposé connexe). Il s'agit des configurations constituées d'un seul amas parcourant tous les sites de G , appelées arbres couvrants [45]. Une autre manière de procéder consiste à prendre cette limite à $\frac{v}{Q}$ fixé [50]. Pour comprendre l'effet de cette limite, il faut remarquer qu'on peut récrire l'Eq. (1.9) de la façon suivante :

$$Z = Q^S \sum_{G' \subseteq G} \left(\frac{v}{Q} \right)^{b(G')} Q^{c(G')} \quad (1.13)$$

où $c(G')$ est le nombre cyclomatique de G' , i.e. le nombre de circuits indépendants de G' . En effet, on a la relation d'Euler, valable pour tout réseau *planaire* :

$$c(G') = b(G') + n(G') - S. \quad (1.14)$$

Cette relation se comprend de la façon suivante : considérons un amas donné. Chaque lien de l'amas ajoute un nouveau site, excepté lorsque le site a déjà été pris en compte, i.e. lorsqu'on a réalisé un circuit. On en déduit que $S = n(G') + b(G') - c(G')$. La limite $Q \rightarrow 0$ à $\frac{v}{Q}$ fixé sélectionne donc les configurations d'amas ayant une valeur minimale de c , en l'occurrence 0. Ces configurations d'amas, ne contenant pas de circuit, sont appelées forêts.

Le modèle de Potts est relié à bien d'autres modèles, comme par exemple la percolation de sites ou l'adsorption, ce qui explique en partie sa richesse [1]. Nous verrons dans la suite qu'il est relié également à des modèles de vertex et des modèles de hauteurs.

1.2 Dualité

1.2.1 Principe

La dualité consiste à relier entre elles des quantités définies sur le réseau G considéré, appelé réseau direct, et des quantités associées à un autre réseau D , le réseau dual de G [4]. Initialement ce sont Kramers et Wannier qui ont en 1941 considéré des transformations de dualité pour un modèle d'Ising défini sur un réseau planaire [74]. Ils ont ainsi pu localiser la température critique du modèle d'Ising sur un réseau carré, trois ans avant qu'Onsager ne le résolve [120]. En ce qui concerne le modèle de Potts, une relation de dualité fut initialement établie par Potts dans le cas d'un réseau carré, en utilisant les matrices de transfert. La relation de dualité a ensuite été généralisée au cas de n'importe quel réseau planaire [121],[122]. Une revue sur la dualité a été faite par Savit [73]. Nous donnons ici la dérivation de Wu [1].

Par définition, D est le réseau dont les sites sont à l'intersection des médiatrices des liens de G et dont les liens sont les portions de ces médiatrices reliant ces sites. Un exemple est donné Fig. (1.1). Les sites de D se trouvent donc au centre des faces de G , leur nombre est donc égal à $c(G) + 1$, i.e. au nombre de circuits indépendants de G plus un, pour tenir compte de la face externe. En utilisant la relation d'Euler, voir l'Eq. (1.14), comme $b(G) = B$ et $n(G) = 1$, on en déduit que le nombre S_D de sites de D est donné par $S_D = B + 2 - S$, tandis que par construction le nombre de liens de D est égal au nombre de liens de G . Le nombre de circuits de D , $c(D)$ est égal à $S - 1$, car le dual de D est G (en partant de G et en appliquant deux fois la transformation de dualité, on obtient G). Le dual d'un réseau carré infini est aussi un réseau carré infini, tandis que le dual d'un réseau triangulaire infini est un réseau hexagonal infini.

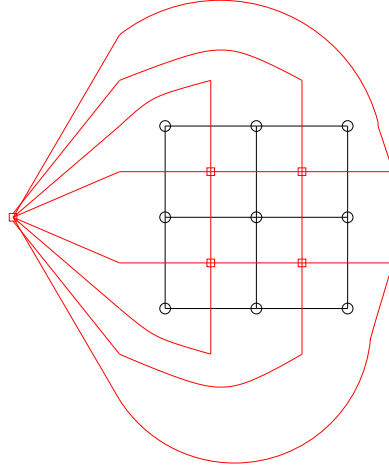


FIG. 1.1 – Réseau dual (en rouge) associé à un réseau carré de taille finie (en noir). Les sites du réseau dual sont les centres des faces du réseau direct et le site externe.

On peut associer à une configuration d'amas G' sur G une configuration d'amas duale D' sur D : on colorie le lien de D' s'il coupe un lien non colorié de G' , on ne le colorie pas s'il coupe un lien colorié de G' , comme montré Fig. (1.2). On a les relations suivantes entre G' et D' :

$$n(D') = c(G') + 1 \quad (1.15)$$

$$n(G') = c(D') + 1 \quad (1.16)$$

$$b(D') + b(G') = B. \quad (1.17)$$

Cette correspondance biunivoque entre les G' et les D' permet de démontrer une égalité entre $Z_D(Q, v_D)$, fonction de partition du modèle de Potts sur le réseau dual pour un paramètre de température v_D bien choisi, à $Z(Q, v)$. En effet, d'après l'Eq. (1.13), on a :

$$Z_D(Q, v_D) = Q^{S_D} \sum_{D' \subseteq D} \left(\frac{v_D}{Q} \right)^{b(D')} Q^{c(D')}. \quad (1.18)$$

En remplaçant $b(D')$ par $B - b(G')$ et $c(D')$ par $n(G') - 1$, on obtient :

$$Z_D(Q, v_D) = Q^{S_D-1} \left(\frac{v_D}{Q} \right)^B \sum_{G' \subseteq G} \left(\frac{Q}{v_D} \right)^{b(G')} Q^{n(G')}. \quad (1.19)$$

D'après l'Eq. (1.9), on voit donc que

$$Z_D(Q, v_D) = Q^{S_D-1} v^{-B} Z_G(Q, v) \quad (1.20)$$

à condition que

$$v_D = \frac{Q}{v}. \quad (1.21)$$

A un facteur près, la fonction de partition sur D pour une température v_D est égal à la fonction de partition sur G pour une température v . Notons qu'à v grand, correspond v_D petit et réciproquement, ce qui était prévisible étant donné la correspondance entre les G' et les D' . Le facteur de proportionnalité entre les fonctions de partition se retrouve d'ailleurs en remarquant qu'à la configuration d'amas G_{full} (tous les sites de G reliés entre eux) de poids $Q v^B$ dans Z_G est associée la configuration duale D_{empty} où aucun site de D n'est relié, de poids Q^{S_D} dans Z_D . Par conséquent le facteur de proportionnalité est $Q^{S_D-1} v^{-B}$.

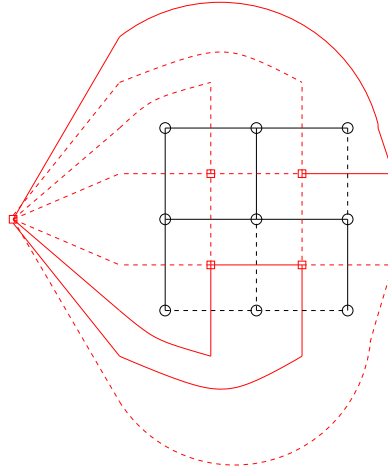


FIG. 1.2 – Correspondance entre configurations d'amas directe et duale. Les liens coloriés sont représentés en trait plein, et les liens non coloriés en pointillés. Les liens duaux non coloriés et coloriés coupent respectivement des liens directs coloriés et non coloriés.

1.2.2 Implications pour les réseaux carré et triangulaire

La relation de dualité (1.20) peut permettre de déterminer dans les cas favorables la position des points critiques. Considérons par exemple un réseau G carré, et infini puisque nous sommes intéressés par les points critiques. Nous avons vu que dans ce cas le réseau D est identique à G . On a donc simplement $Z_G(Q, v_D) = Q^{S_D-1} v^{-B} Z_G(Q, v)$: la dualité relie alors deux fonctions de partition définies sur le même réseau mais à des températures différentes. On en déduit que si v_C est une valeur critique de v , alors $\frac{Q}{v}$ l'est également. Cependant, il arrive souvent, notamment lorsqu'il y a un seul point critique (ce qui est le cas dans la zone des $v > 0$), que les points critiques soient autoduaux, i.e. vérifient $v_D = v$. Les solutions de cette équation donnent $v = \sqrt{Q}$ et $v = -\sqrt{Q}$. Effectivement, $v = \sqrt{Q}$ correspond à la transition ferromagnétique, tandis que $v = -\sqrt{Q}$ correspond à la transition de Berker-Kadanoff, située dans la zone antiferromagnétique. Cependant, il y a deux autres points critiques correspondant à la transition antiferromagnétique, duaux l'un de l'autre et qui par conséquent ne sont pas localisables par cette méthode [37]. Le diagramme de phase sera détaillé dans la sous-section 3.3.1. Notons que le facteur de proportionnalité $Q^{S_D-1} v^{-B}$ vaut bien 1 lorsque v est autodual.

Le cas du réseau triangulaire a été considéré par Kim et Joseph [40]. Il est plus difficile car le réseau dual est un réseau hexagonal, qui est en l'occurrence différent du réseau de départ. Il faut donc trouver le moyen de revenir au réseau triangulaire de départ. Pour cela, on effectue une décimation, encore appelée relation triangle-étoile : le réseau hexagonal étant bipartite, on somme sur les valeurs possibles des spins situés sur les sites "pairs" du réseau hexagonal, de manière à réobtenir un réseau triangulaire. Cela est représenté dans la Fig. 1.3. On suppose donc Q entier, mais les relations obtenues seront valables pour Q quelconque par prolongement analytique. On cherche ainsi A et K' tels que (on note S_i les spins sur le réseau dual) :

$$\sum_{S_0} \exp \left(K_D \sum_{i=1}^3 \delta(S_0, S_i) \right) = A \exp \left(K' \sum_{i>j=1}^3 \delta(S_i, S_j) \right). \quad (1.22)$$

En donnant aux spins S_i , $1 \leq i \leq 3$, des valeurs particulières, on obtient les trois équations

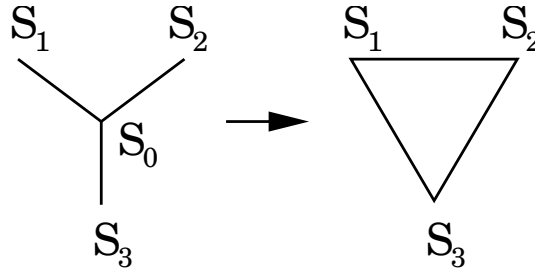


FIG. 1.3 – Par sommation sur les valeurs des spins pairs, on obtient à partir du réseau hexagonal un réseau triangulaire.

suivantes :

$$(Q - 3) + 3 \exp(K_D) = A \quad (1.23)$$

$$(Q - 2) + \exp(K_D) + \exp(2K_D) = A \exp(K') \quad (1.24)$$

$$(Q - 1) + \exp(3K_D) = A \exp(3K') . \quad (1.25)$$

La première équation correspond à des valeurs des S_i , $1 \leq i \leq 3$, toutes différentes, la deuxième à deux S_i dans le même état, et la troisième aux trois S_i dans le même état. On a supposé ici que Q était supérieur à 3, car sinon les trois S_i ne pourraient être dans des états différents, mais là encore par prolongement analytique les résultats obtenus seront valables pour tout Q [40].

Il faut noter que pour Q générique ces équations n'admettent pas de solution pour une valeur de K_D quelconque, puisqu'on a trois équations pour seulement deux inconnues. En effet, la relation triangle-étoile est reliée à l'intégrabilité du modèle, et effectivement le modèle de Potts à Q quelconque n'est intégrable que pour certaines valeurs de K (donc de K_D). Le modèle d'Ising est une exception, puisqu'il est intégrable quelle que soit la valeur de K : effectivement on n'a que deux équations indépendantes, et donc toujours des solutions. Pour Q générique, les seules solutions correspondent aux solutions "autoduales", i.e. telles que K' est égal à K . En revenant à la variable v , on trouve que les solutions autoduales sont les racines de :

$$v^3 + 3v^2 = Q . \quad (1.26)$$

Baxter, Temperley et Ashley ont déterminé l'énergie libre du modèle le long de cette courbe [38]. Pour Q compris entre 0 et 4, cette équation admet trois racines réelles, correspondant aux transitions ferromagnétique, de Berker-Kadanoff, et antiferromagnétique. Nous verrons dans la sous-section 3.3.1 qu'il existe un autre point critique qui n'est pas autodual (et qui n'existe pas en double puisque la transformation de dualité n'existe que pour les solutions autoduales!). En fait, nous montrerons dans la section suivante qu'il existe une autre transformation de dualité dans le cas où il y a des interactions à trois spins sur réseau triangulaire, et que cette transformation duale existe pour toutes les valeurs de K à condition d'inclure des interactions à trois spins sur le réseau dual même lorsqu'il n'y en a pas sur le réseau direct.

1.2.3 Développement en boucles

Il existe encore une autre façon équivalente d'écrire la fonction de partition du modèle de Potts, appelée développement en boucles, qui a été établie par Baxter [28]. Elle a l'avantage de pouvoir, comme on le verra dans la sous-section 3.2.2, relier le modèle de Potts sur réseau carré

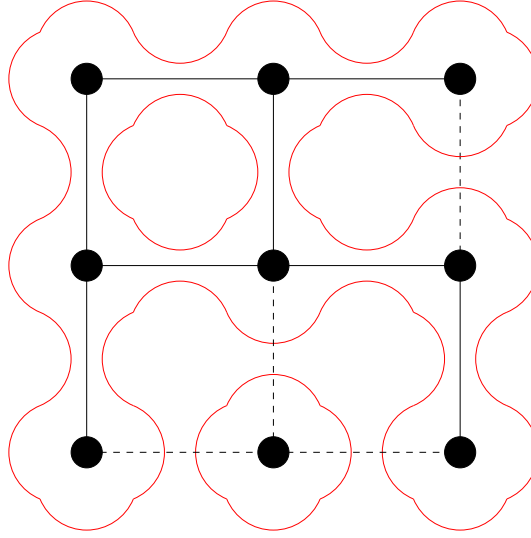


FIG. 1.4 – Configuration de boucles (en rouge) associée à la configuration d’amas représentée Fig. (1.2). Les boucles entourent les amas. Le nombre de boucles l est égale à la somme du nombre d’amas n et du nombre de circuits c . Ici, comme $n = 2$ et $c = 1$, on a $l = 3$ boucles.

au modèle à six vertex et de donner une démonstration alternative pour la détermination des points autoduaux du réseau carré. De plus, une généralisation de ce développement en boucles va nous permettre dans la section suivante d’effectuer une transformation de dualité pour des réseaux triangulaires avec interaction à trois spins.

Par définition, le réseau médial M de G est le réseau constitué des milieux des liens de G , ces milieux étant reliés entre eux. A une configuration d’amas G' définie sur G , on associe une décomposition M' de M , ou configurations de boucles, de manière à ce que les amas soient entourés par des boucles. Le nombre de boucles $l(M')$ de M' est donné par :

$$l(M') = n(G') + c(G') . \quad (1.27)$$

En effet, les $n(G')$ amas de G' sont entourés par $n(G')$ boucles, tandis que $c(G')$ boucles sont entourées par $c(G')$ circuits de G' . Cette relation est illustrée dans la Fig. (1.4). Compte tenu de la relation d’Euler (on suppose G planaire) voir Eq. (1.14), on peut exprimer $l(M')$ en fonction de $n(G')$ et $b(G')$, au lieu de $n(G')$ et $c(G')$:

$$l(M') = 2n(G') + b(G') - S . \quad (1.28)$$

On en déduit en utilisant le développement de Fortuin-Kasteleyn, voir Eq. (1.9), que :

$$Z = Q^{\frac{S}{2}} \sum_{M'} \sqrt{Q}^{l(M')} x^{b(C')} \quad (1.29)$$

où C' est la configuration d’amas correspondant à M' et x est défini par

$$x = \frac{v}{\sqrt{Q}} . \quad (1.30)$$

Selon les contextes, x pourra être appelé aussi paramètre de température, car il est proportionnel à v . Ce développement consiste donc, à un facteur global $Q^{\frac{S}{2}}$ près, à attribuer un poids \sqrt{Q} par boucle et un poids x (au lieu de v dans le développement de Fortuin-Kasteleyn) par lien colorié.

1.3 Modèles de Potts couplés

1.3.1 Modèles couplés via l'opérateur énergie

L'étude des modèles couplés est intéressante car elle constitue un moyen de passer de modèles à deux dimensions à des modèles à trois dimensions (avec un couplage de portée infinie selon une direction, toutes les couches étant couplées entre elles), même si en pratique il est difficile d'étudier un nombre important de modèles couplés. De plus, c'est aussi un moyen de déduire des résultats pour des modèles désordonnés, car d'après la méthode des répliques, ils correspondent au cas de N_c modèles couplés dans la limite $N_c \rightarrow 0$. De nombreux travaux utilisant la méthode des répliques ont été effectués. Une introduction à cette méthode et ses applications peut être trouvée dans le livre de Mezard, Parisi et Virasoro [123].

Jacobsen a établi les relations de dualité pour deux et trois modèles couplés via l'opérateur énergie dans [91], puis pour un nombre arbitraire de modèles couplés dans [6]. Nous exposons ses travaux dans le cas de deux modèles de Potts couplés, et nous indiquerons brièvement comment généraliser à un nombre quelconque de modèles. L'hamiltonien du modèle est donné par :

$$-\beta H_2 = \sum_{\langle ij \rangle} K_1 \delta(\sigma_i^1, \sigma_j^1) + K_2 \delta(\sigma_i^2, \sigma_j^2) + K_{12} \delta(\sigma_i^1, \sigma_j^1) \delta(\sigma_i^2, \sigma_j^2). \quad (1.31)$$

L'exposant des σ_i correspond au modèle considéré. K_1 est la constante de couplage du premier modèle, K_2 la constante de couplage du deuxième modèle, et K_{12} la constante couplant les densités d'énergie locales des deux modèles entre elles. On note respectivement Q_1 et Q_2 les nombres d'états des premier et deuxième modèles. On peut écrire un développement de Fortuin-Kasteleyn généralisé :

$$Z = \sum_{G'_1, G'_2} v_1^{b(G'_1 \cap \bar{G}'_2)} v_2^{b(\bar{G}'_1 \cap G'_2)} v_{12}^{b(G'_1 \cap G'_2)} Q_1^{n(G'_1)} Q_2^{n(G'_2)} \quad (1.32)$$

où les v sont définis par :

$$v_1 = \exp(K_1) - 1 \quad (1.33)$$

$$v_2 = \exp(K_2) - 1 \quad (1.34)$$

$$v_{12} = \exp(K_1 + K_2 + K_{12}) - \exp(K_1) - \exp(K_2) + 1 \quad (1.35)$$

v_1 et v_2 sont respectivement les paramètres v associés aux premier et deuxième modèles. v_{12} est le paramètre v associé au couplage entre les deux modèles. Notons qu'il dépend non seulement de K_{12} , mais aussi de K_1 et K_2 . Cela est dû au fait qu'après développement de $\exp(-\beta H_2)$, le terme devant les $\delta(\sigma_i^1, \sigma_j^1) \delta(\sigma_i^2, \sigma_j^2)$, qui est en l'occurrence v_{12} , dépend de ces trois constantes de couplage. G'_1 et G'_2 sont respectivement les configurations d'amas pour les modèles 1 et 2. \bar{G}' correspond à la configuration d'amas complémentaire de G' : les sites de G non reliés dans G' le sont dans \bar{G}' et réciproquement. Le développement de l'Eq. (1.32) est donc intuitif. Il y a un poids Q par amas (la valeur de Q étant différente entre les modèles 1 et 2), tandis que le poids par lien est v_1 s'il n'est colorié que dans le modèle 1, v_2 s'il n'est colorié que dans le modèle 2, et v_{12} s'il est colorié dans les deux.

Le développement de l'Eq. (1.32) permet d'écrire une relation de dualité entre G et son réseau dual D . Pour déterminer simplement cette relation, on considère d'abord la constante de proportionnalité entre Z_D et Z . Le poids dans Z de G_{full} , configuration où tous les liens

directs sont coloriés dans les deux modèles, vaut $Q^2 v_{12}^B$; tandis que le poids dans Z_D de D_{empty} , configuration où aucun lien dual n'est colorié, vaut Q^{2S_D} . Comme la configuration d'amas duale de G_{full} est D_{empty} , la constante de proportionnalité doit être égale à $Q^{2S_D-2} v_{12}^{-B}$ et par conséquent la relation de dualité s'écrit :

$$Z_D(v_{1D}, v_{2D}, v_{12D}) = Q^{2S_D-2} v_{12}^{-B} Z(v_1, v_2, v_{12}) . \quad (1.36)$$

Pour déterminer les températures duales v_{1D} , v_{2D} and v_{12D} , on remarque que le poids relatif entre un G' quelconque et G_{full} doit être égal au poids relatif entre le D' dual de G' et D_{empty} . On en déduit alors qu'elles valent :

$$v_{1D} = \frac{v_2 Q_1}{v_{12}} \quad (1.37)$$

$$v_{2D} = \frac{v_1 Q_2}{v_{12}} \quad (1.38)$$

$$v_{12D} = \frac{Q_1 Q_2}{v_{12}} . \quad (1.39)$$

Considérons maintenant brièvement le cas où il y a plus que deux modèles couplés. On appelle M l'ensemble des modèles. Dans ce cas, on définit des constantes de couplage K_m , où m est un sous ensemble de M . K_m est la constante de couplage entre les modèles contenus dans m . Il est nécessaire de bien considérer tous les m possibles, car par dualité ils sont engendrés. On définit alors toujours de manière analogue au cas de deux modèles des v_m , dépendant de tous les K'_m avec m' inclus dans m . Ensuite, en utilisant le développement de Fortuin-Kasteleyn généralisé, on montre que les relations de dualité sont de la forme[6] :

$$v_{mD} = \frac{v_{M-m} \prod_{i \in M} Q_i}{v_M} . \quad (1.40)$$

Pour un réseau carré, les Eq. (1.40) permettent de déterminer les solutions autoduales. Dans le cas d'un réseau G triangulaire, il faut encore revenir au réseau de départ, en faisant une transformation triangle-étoile généralisée. Nous avons étudié cela dans [5]. Là encore, cette transformation n'existe pas pour toutes les valeurs des paramètres, mais il existe des solutions autoduales, formant un sous espace de l'espace des paramètres. Dans [5], nous établissons les équations d'autodualité de deux modèles couplés, de nombre d'états Q_1 et Q_2 , en effectuant la transformation de dualité suivie d'une transformation triangle-étoile. Dans le cas où $Q_1 \neq Q_2$, il n'y a que des solutions triviales, i.e. des solutions appartenant à l'un de ces deux types :

1. les modèles sont découplés : $K_{12} = 0$, i.e. $v_{12} = v_1 v_2$, v_1 vérifiant $v_1^3 + 3v_1^2 = Q_1$ et v_2 une équation similaire. On a donc deux modèles autoduaux découplés.
2. les modèles sont fortement couplés : $K_1 = K_2 = 0$ et $K_{12} \neq 0$, et sont donc équivalents à un seul modèle de Potts à $Q_1 Q_2$ états. v_{12} vérifie donc $v_{12}^3 + 3v_{12}^2 = Q_1 Q_2$.

Par contre, dans le cas où $Q_1 = Q_2 = Q$, il y a des solutions non triviales. Ces solutions ne brisent pas la symétrie de permutation entre les réseaux (contrairement à certaines solutions triviales du premier type) et correspondent donc à $v_1 = v_2$. Elles sont caractérisées par :

$$v_1^3 + 6v_1^2 + 3v_1 Q + Q(Q - 2) = 0, \quad v_{12} = \frac{Q - v_1^2}{2 + v_1} . \quad (1.41)$$

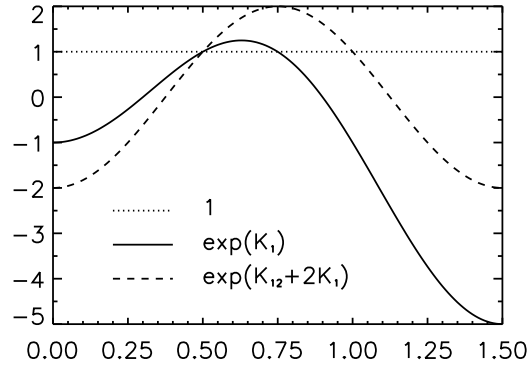


FIG. 1.5 – Variation des poids de Boltzmann avec le paramètre g défini dans l'Eq. (1.42).

Pour Q compris entre 0 et 4, ces équations d'autodualité admettent trois solutions possibles. On paramétrise Q par $Q = 4 \cos^2(\pi g)$. Lorsque g varie entre 0 et $\frac{3}{2}$, Q parcourt $[0, 4]$ trois fois. Les solutions autoduales ont l'expression suivante :

$$v_1 = z(1 - z), \quad v_{12} = (z - 1)^2, \quad z \equiv 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}g\right). \quad (1.42)$$

Les poids de Boltzmann correspondant pour deux spins voisins identiques dans aucun, un ou les deux modèles sont respectivement :

$$1, \quad e^{K_1} = 1 + z - z^2, \quad e^{K_{12}+2K_1} = 2 - z^2. \quad (1.43)$$

Leur variation avec g est représentée dans la Fig. 1.5

Les calculs avec cette procédure de dualité suivie de décimation sont très lourds. C'est pourquoi nous avons utilisé une autre méthode, moins lourde, qui généralise les travaux de Wu et Lin [7]. Cette méthode permet de plus de considérer des interactions à trois spins situées un triangle sur deux. Nous exposons dans la prochaine sous-section la procédure de Wu et Lin.

1.3.2 Modèle de Potts sur réseau triangulaire avec interaction à trois spins

Dans le cas où il y a des interactions à trois spins, on ne peut plus procéder comme précédemment. Nous allons dans cette sous-section étudier le cas d'un seul modèle avec interaction à trois spins afin de voir les modifications à apporter aux développements en amas et en boucles de Z . Nous exposons la procédure de Wu et Lin [7]. Ensuite, en combinant les idées de cette sous-section avec celles de la sous-section précédente, nous traiterons le cas de modèles couplés avec interaction à trois spins.

On considère un hamiltonien donné par

$$-\beta H = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + L \sum_{\langle ijk \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k). \quad (1.44)$$

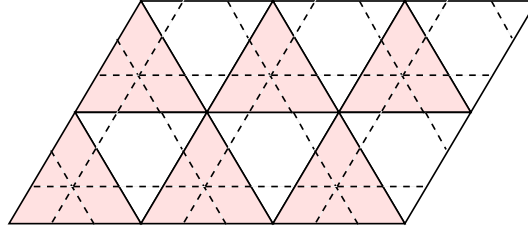


FIG. 1.6 – Le réseau triangulaire est représenté en trait plein. Il y a des interactions à deux spins selon chaque lien, et des interactions à trois spins entre les spins entourant les triangles grisés. Le modèle de boucles est défini sur un réseau triangulaire décalé, représenté en pointillés.

L est la constante de couplage à trois spins, $\delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ étant défini comme :

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) = \delta(\sigma_i, \sigma_j) \delta(\sigma_j, \sigma_k) \delta(\sigma_k, \sigma_i) . \quad (1.45)$$

Les $\langle ijk \rangle$ correspondent uniquement aux triangles pointant vers le haut : l'interaction à trois spins n'existe que sur un triangle sur deux. En effet, dans le cas où elle existe sur tous les triangles, on ne connaît pas de relation de dualité. Le réseau est représenté Fig. (1.6). Il y a deux paramètres de température : $v = \exp K - 1$, associé à l'interaction à deux spins, et $w = \exp L - 1$, associé à l'interaction à trois spins.

On ne peut plus comme avant raisonner lien par lien : il faut maintenant raisonner triangle par triangle. Notons que seuls les triangles orientés vers le haut suffisent à reconstruire tout le réseau G . On développe le poids de Boltzmann w_{ijk} associé à un triangle pointant vers le haut :

$$w_{ijk} = f_1 \delta(\sigma_i, \sigma_j) + f_2 \delta(\sigma_j, \sigma_k) + f_3 \delta(\sigma_i, \sigma_k) + f_4 + f_5 \delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) \quad (1.46)$$

où les f_α sont donnés par :

$$f_1 = f_2 = f_3 = v \quad (1.47)$$

$$f_4 = 1 \quad (1.48)$$

$$f_5 = v^3 + 3v^2 + w(1 + v)^3 . \quad (1.49)$$

A chacun de ces cinq termes est associé un diagramme de liens, représenté Fig.(1.7) : aux $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$ sont associés des liens "en boomerang", et aux $\delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ des liens "en Y" reliant les trois spins entourant le triangle. On peut donc écrire la fonction de partition sous la forme :

$$Z = \sum_L Q^{n(L)} \prod_{\alpha=1}^5 f_\alpha^{n_\alpha(L)} \quad (1.50)$$

Les L correspondent aux diagrammes de liens possibles sur tout le réseau triangulaire G , $n(L)$ au nombre de composantes connexes de L , et $n_\alpha(L)$ aux nombres de triangles pointant vers le haut ayant un diagramme de liens de type α . L'Eq. (1.50) est l'analogue du développement de Fortuin-Kasteleyn, donné par l'Eq. (1.9), dans le cas où il y a des interactions à trois spins. La relation d'Euler est maintenant :

$$S = n(L) + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2n_5 - c(L) . \quad (1.51)$$

Considérons maintenant l'analogue du développement en boucles, donné par l'Eq. (1.29). Le développement en boucles est défini sur un réseau triangulaire décalé, et la correspondance

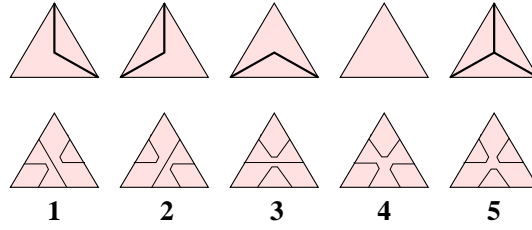


FIG. 1.7 – Correspondance entre les diagrammes de liens et les vertex du modèle de boucles.

entre les diagrammes de liens et les configurations des boucles est représenté dans la Fig.(1.7). Pour écrire Z en fonction des configurations de boucles B , on procède comme habituellement. On utilise la relation $l(B) = n(L) + c(L)$, et la relation d'Euler (1.51), afin d'exprimer $n(L)$ en fonction de $l(B)$:

$$n(L) = \frac{1}{2}(l(B) + n_4 - n_5) . \quad (1.52)$$

On obtient alors le développement en boucles de Z :

$$Z = \sum_B \sqrt{Q}^{l(B)} \prod_{\alpha=1}^5 c_{\alpha}^{n_{\alpha}(B)} \quad (1.53)$$

avec les poids des vertex c_{α} donnés par

$$c_i = f_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \quad (1.54)$$

$$c_4 = \sqrt{Q} \quad (1.55)$$

$$c_5 = \frac{f_5}{\sqrt{Q}} . \quad (1.56)$$

Le développement (1.53) permet d'écrire une relation de dualité. En effet, pour un réseau triangulaire infini, Z doit être invariante sous rotation de $\frac{\pi}{3}$, et donc par interversion entre c_4 et c_5 . En revenant aux f_{α} , on obtient la relation de dualité suivante :

$$Z(f'_{\alpha}) = \left(\frac{Q}{f_5} \right)^S Z(f_{\alpha}) \quad (1.57)$$

avec

$$f'_{\alpha} = \frac{Q f_{\alpha}}{f_5} \text{ pour } 1 \leq \alpha \leq 3 \quad (1.58)$$

$$f'_4 = 1 \quad (1.59)$$

$$f'_5 = \frac{Q^2}{f_5} . \quad (1.60)$$

On voit que la transformation de dualité est bien définie quelle que soit la valeur des paramètres de température, mais qu'elle introduit des interactions à trois spins même lorsqu'au départ il n'y en a pas. La surface autoduale correspond à $c_4 = c_5$, i.e. $f_5 = Q$. En utilisant l'Eq. (1.49), on obtient

$$v^3 + 3v^2 + w(1+v)^3 = Q . \quad (1.61)$$

Pour $w = 0$, i.e. lorsqu'il n'y a pas d'interactions à trois spins, on retrouve le résultat de la sous-section (1.2.2). Pour une valeur donnée de w , il y a trois valeurs critiques autoduales de v .

1.3.3 Modèles couplés avec interaction à trois spins

Lorsqu'il y a plusieurs modèles couplés, les résultats se généralisent comme dans la sous-section (1.3.1). Nous avons exposé la procédure dans [5]. Par exemple, dans le cas de deux modèles couplés, on définit des $f_{\alpha,\beta}$ et des $c_{\alpha,\beta}$, α et β correspondant respectivement aux premier et deuxième modèles. Pour Q_1 et Q_2 différents, on a supposé qu'on n'obtenait que des solutions triviales, compte tenu des résultats en l'absence d'interaction à trois spins, c'est pourquoi nous nous sommes restreints au cas où $Q_1 = Q_2$. De même, on suppose qu'il n'y a pas brisure de symétrie de permutation entre les deux réseaux. Compte tenu de l'isotropie du modèle et du fait que $Q_1 = Q_2$, on trouve que les relations de dualité indépendantes sont :

$$c_{44} = c_{55} \quad (1.62)$$

$$c_{14} = c_{15} . \quad (1.63)$$

En utilisant les expressions des $c_{\alpha,\beta}$ en fonction des v (interactions à deux spins) et des w (interaction à trois spins), on trouve les solutions autoduales. En particulier, en l'absence d'interaction à trois spins ($w_1 = w_2 = w_{12} = 0$), on retrouve l'Eq. (1.41), mais de manière beaucoup plus rapide. Dans le cas général, on n'obtient pas d'expression simple, c'est pourquoi dans [5] nous nous sommes concentrés sur quelques solutions remarquables.

Comme en l'absence d'interaction à trois spins, il y a deux types de solutions triviales :

1. solution déécouplée : $K_{12} = L_{12} = 0$, i.e. avec $v_{12} = v_1^2$ et $w_{12} = w_1^2$. On retrouve alors le critère d'autodualité d'un *seul* modèle, donné dans l'Eq. (1.61).

$$v_1^3 + 3v_1^2 - Q + w_1(1 + v_1)^3 = 0. \quad (1.64)$$

2. solution fortement couplée ($K_1 = L_1 = 0$, i.e. $v_1 = w_1 = 0$). On trouve

$$v_{12}^3 + 3v_{12}^2 - Q^2 + w_{12}(1 + v_{12})^3 = 0. \quad (1.65)$$

Il s'agit du critère d'autodualité pour un seul modèle, à Q^2 états.

Des solutions non-triviales intéressantes peuvent être obtenues en donnant des valeurs particulières à v_1 , w_1 ou w_{12} :

1. Pour $w_1 = 0$ (i.e. $L_1 = 0$), il y a seulement une solution non-triviale :

$$(v_1^3 + 6v_1^2 + 3Qv_1 + Q(Q - 2)) (v_1^3 + 3v_1^2 - Q) = w_{12}(v_1^2 + 5v_1 + Q + 2)^3 \quad (1.66)$$

$$v_{12} = \frac{Q - v_1^2}{2 + v_1} . \quad (1.67)$$

Lorsque $w_{12} = 0$, en factorisant le membre de gauche, on retrouve l'Eq. (1.41) ou la solution triviale de l'Eq. (1.64).

2. Pour $w_{12} = w_1^2$ (i.e. $L_{12} = 0$), il y a une solution du type :

$$v_1 = -\frac{Q}{2}, \quad v_{12} = -\frac{Q^2}{2} + 3Q - 3, \quad w_1 = \frac{Q(4 - Q)}{(Q - 2)^2} . \quad (1.68)$$

3. Pour $v_1 = -1$ (i.e. $K_1 \rightarrow -\infty$), il y a une solution de la forme :

$$v_{12} = Q - 1, \quad w_1 = -\frac{1}{2} \left(w_{12} + \frac{Q^2 - 5Q + 5}{Q^2 - 4Q + 4} \right) . \quad (1.69)$$

Le modèle de Potts étant souvent critique lorsqu'il est autodual (par exemple lorsqu'on considère un modèle de Potts autodual avec $Q \leq 4$ sur un réseau triangulaire), on s'attend à ce que ce soit également le cas pour les modèles couplés. Nous allons voir dans le chapitre suivant comment caractériser le comportement critique correspondant.

Chapitre 2

Caractérisation du comportement critique

Nous exposons dans ce chapitre des outils classiques en physique statistique, qui vont permettre dans la suite de caractériser le comportement critique du modèle de Potts. Nous effectuons tout d'abord dans la section 3.1 des rappels sur l'invariance conforme. Belavin, Polyakov et Zamolodchikov ont ainsi utilisé le fait qu'un système à un point fixe, dans la limite continue, est invariant non seulement sous les dilatations globales, mais aussi sous les dilatations locales, pour en déduire de fortes implications sur les comportements critiques [8]. Nous présentons ces implications en suivant le livre de Francesco, Mathieu et Sénéchal [30]. En particulier, des modèles ont été beaucoup étudiés, comme les modèles minimaux [8] ou les modèles parafermioniques [57]. Nous exposons ensuite les résultats de Cardy [11],[12] sur les calculs de fonctions de partition dans la limite continue pour différentes conditions aux limites (CL). Nous finissons les rappels par le théorème c , dû à Zamolodchikov [13], qui s'intéresse au comportement sous renormalisation du système en dehors d'un point fixe.

Dans la section 3.2, nous revenons à un modèle défini sur un réseau discret, et exposons le formalisme de la matrice de transfert, dans la représentation en spins, en amas et en boucles. Nous suivons la présentation faite par Salas et Sokal dans [14]. La matrice de transfert, quelle que soit la représentation choisie, a toujours la même structure algébrique, et s'exprime à l'aide d'opérateurs e_i constituant une algèbre de Temperley-Lieb [26]. Cependant, cela ne veut pas dire que le spectre de la matrice de transfert est le même pour toutes les représentations et nous serons amenés, notamment dans le chapitre 4, à comparer ces spectres. Nous terminons la section par la notion de renormalisation phénoménologique, introduite par Nightingale [75] et qui consiste à voir comment la charge centrale effective du système varie avec la taille.

Comme application des notions présentées dans ces deux sections, nous exposons ensuite l'étude numérique de deux modèles de Potts couplés définis sur réseau triangulaire, avec uniquement des interactions à deux spins. Nous avons publié cette étude dans [5]. Nous avons calculé numériquement la charge centrale effective du système lorsqu'il est autodual, à l'aide d'une matrice de transfert définie dans la représentation en boucles.

2.1 Rappels sur l'invariance conforme

2.1.1 Invariance conforme

Lorsque le système subit une transition de phase du second ordre, il y a des fluctuations à toutes les échelles de longueur, ce qui se traduit par une longueur de corrélation infinie. Cela entraîne que le système peut être décrit comme un système continu, car les détails du réseau ne jouent pas de rôle. On introduit donc des variables spatiales x et y pour des systèmes à deux dimensions, ainsi que des champs ϕ qui dépendent continuellement de ces variables. Le fait qu'on puisse oublier le pas du réseau n'est pas trivial, c'est parce que les systèmes sont renormalisables : on appelle ces champs ϕ champs renormalisés, car ils ont été normalisés de façon à faire disparaître le pas du réseau. Il n'est d'ailleurs pas toujours facile de savoir à quoi correspondent ces champs ϕ lorsqu'on revient sur le réseau discret. On appelle aussi ces champs opérateurs, car nous allons voir qu'on peut définir un espace de Hilbert sur lequel ils agissent.

Comme les détails du réseau sont oubliables, les fonctions de corrélation ont une invariance par dilatation et par rotation, et sont donc de la forme :

$$\langle \phi(0,0)\phi(x,y) \rangle = \frac{\exp(-is_\phi\theta)}{r^{2x_\phi}}, \quad (2.1)$$

r et θ étant respectivement la distance et l'angle correspondant au point (x,y) . x_ϕ est la dimension d'échelle de ϕ et indique comment ϕ se transforme sous une dilatation, tandis que s_ϕ est son spin et indique comment il se transforme sous une rotation.

Cependant, au niveau d'un point critique, le système possède en fait une invariance plus grande, car il est invariant sous les dilatations *locales*. Cette idée, due à Polyakov et datant de 1970 [62], ne sera utilisée pleinement qu'en 1984, par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [8]. Ainsi, le groupe de symétrie est le groupe des transformations conformes, i.e. le groupe laissant la métrique invariante à un facteur *local* près. Ce fait a peu d'implications en dimension supérieure à deux car ce groupe a un nombre fini de générateurs. Par contre, en dimension deux, les transformations conformes correspondent aux fonctions méromorphes, les fonctions pouvant n'être définies que localement, en faisant le changement de variable habituel $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

2.1.2 Opérateurs primaires

Par définition, les opérateurs primaires sont les opérateurs se transformant sous la transformation conforme $z \rightarrow w(z)$ (et $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$) selon [30] :

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h_\phi} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}_\phi} \phi(z, \bar{z}). \quad (2.2)$$

h et \bar{h} sont appelés respectivement dimensions holomorphes et antiholomorphes de ϕ . En comparant avec l'Eq. (2.1), on voit que la dimension d'échelle est donnée par $x_\phi = h_\phi + \bar{h}_\phi$ et le spin par $s_\phi = h_\phi - \bar{h}_\phi$. Tous les opérateurs ne se transforment pas selon l'Eq. (2.2). Les opérateurs se transformant selon l'Eq. (2.2) uniquement pour les transformations globales, i.e. pour les transformations holomorphes définies dans tout le plan, sont appelés quasi primaires. La transformation de l'Eq. (2.2) s'écrivant comme le produit d'une partie holomorphe et une partie antiholomorphe, on définit formellement $\phi(z)$ et $\phi(\bar{z})$ champs holomorphe et antiholomorphe.

Expliquons maintenant pourquoi on peut considérer les champs comme des opérateurs. Pour cela, on effectue ce qu'on appelle la quantification radiale. Elle fut introduite par Fubini, Hanson et Jackiw [125]. Elle consiste à choisir la direction temporelle selon les droites passant par l'origine, tandis que la direction spatiale est selon des cercles de centre l'origine. Nous verrons dans la sous-section 2.1.5 que ce choix est particulièrement intéressant lorsqu'on considère des systèmes définis sur le cylindre. On suppose alors l'existence d'un vide $|0\rangle$, et on construit tout l'espace de Hilbert par application d'opérateurs de création. La conjugaison hermitique est définie par :

$$[\phi(z, \bar{z})]^+ = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \quad (2.3)$$

ce qui permet de définir un produit hermitique.

L'algèbre des opérateurs est alors reliée au développement en produit d'opérateurs (OPE), dont on rappelle le principe. En physique statistique, nous sommes intéressés par les fonctions de corrélation. La forme de celles à deux points a été vue, et on peut choisir la normalisation des ϕ_i telle que :

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(0) \rangle = \delta(i, j) z^{-h_i - h_j} . \quad (2.4)$$

L'intérêt de l'invariance conforme est qu'elle permet de déterminer toutes les fonctions de corrélation d'ordre supérieur. Considérons une fonction de corrélation quelconque de la forme $\langle \dots \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \rangle$ où les champs autres que ϕ_1 et ϕ_2 sont évalués à des temps qui ne sont pas compris entre $|z_1|$ et $|z_2|$. On peut exprimer cette fonction de corrélation en fonction des fonctions de corrélation d'ordre inférieur en développant $\phi_1(z_1) \phi_2(z_2)$ en fonction des autres opérateurs de la théorie. Ainsi, pour $|z_1| > |z_2|$, on a :

$$\phi_1(z_1) \phi_2(z_2) = \sum_{i=1, \infty} C_{12}^i (z_1 - z_2)^{h_i - h_1 - h_2} \phi_i(z_2) . \quad (2.5)$$

Les C_{12}^i sont les coefficients sans dimension intervenant lors de l'OPE et sont appelées constantes de structure. Il est essentiel de noter que comme la fonction de corrélation est singulière pour $z_1 = z_2$ (dans l'OPE de l'Eq. (2.5) il y a des puissances négatives de $z_1 - z_2$), l'OPE n'est pas le même pour $|z_1| < |z_2|$, et ainsi $C_{12}^i \neq C_{21}^i$. Cela se traduit par le fait que les opérateurs (agissant sur l'espace de Hilbert défini précédemment) ne commutent pas. En effet on peut montrer que :

$$\langle \dots \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \rangle = \langle 0 | T(\phi_1(z_1) \phi_2(z_2)) | 0 \rangle , \quad (2.6)$$

où à gauche les ϕ sont vus comme des champs, et à droite comme des opérateurs. T correspond à organiser les ϕ par temps croissant :

$$T(\phi_1(z_1) \phi_2(z_2)) = \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \text{ si } |z_1| > |z_2| \quad (2.7)$$

$$T(\phi_1(z_1) \phi_2(z_2)) = \phi_2(z_2) \phi_1(z_1) \text{ si } |z_1| < |z_2| . \quad (2.8)$$

Le fait que $C_{12}^i \neq C_{21}^i$ implique que les opérateurs ne commutent pas. Pour simplifier les notations, on écrit les OPE de la manière suivante :

$$\phi_1 \phi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} C_{12}^i \phi_i , \quad (2.9)$$

où il est sous-entendu que ϕ_1 est évalué pour un temps plus grand que ϕ_2 . La détermination des C_{ij}^k permet d'accéder à toutes les fonctions de corrélation. Par exemple, les fonctions de corrélation à trois points sont données par :

$$\langle \phi_k(\infty) \phi_i(z) \phi_j(0) \rangle = C_{ij}^k z^{h_k - h_i - h_j} . \quad (2.10)$$

Il reste donc à déterminer les C_{ij}^k . Nous allons voir que les champs se regroupent par familles conformes, et que dans des cas favorables, qui seront exposés dans la prochaine sous-section, il n'y a qu'un nombre fini de familles.

Par définition, les familles conformes sont constituées par des champs se déduisant les uns des autres par des transformations conformes. La variation $\delta_\epsilon \phi$ d'un opérateur ϕ sous la transformation infinitésimale $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ est donnée par :

$$\delta_\epsilon \phi(w) = -[Q_\epsilon, \phi(w)] , \quad (2.11)$$

où Q_ϵ est la charge conforme associée à la transformation, et s'écrit sous la forme :

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \epsilon(z) T(z) \quad (2.12)$$

$T(z)$ étant le tenseur d'énergie-impulsion du système. En développant $T(z)$ en modes, $T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n$, et $\epsilon(z)$, $\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1}$, la charge conforme s'écrit $Q_\epsilon = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \epsilon_n L_n$. Les transformations conformes sur z sont donc engendrées par les L_n . De la même façon, les transformations sur \bar{z} sont engendrées par des \bar{L}_n .

L'algèbre engendrée par les L_n est appelée algèbre de Virasoro, tandis que les \bar{L}_n engendrent une autre copie de cette algèbre. Cette algèbre est apparue pour la première fois dans [124], dans le contexte des modèles de résonance. Pour déterminer les relations de commutation, on considère l'OPE de T avec lui-même. A des termes réguliers près (qui n'ont pas d'importance pour les relations de commutation), on a :

$$T(z)T(w) \sim \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} , \quad (2.13)$$

où la constante c est appelée charge centrale et caractérise la théorie. On peut en particulier déduire que T est un opérateur quasi-primaire, mais non primaire du fait du terme en c , ce qui aura d'importantes conséquences pour l'étude de systèmes sur cylindre, comme nous le verrons. Les relations de commutation de l'algèbre engendrée par les L_n et \bar{L}_n sont donc :

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta(n+m, 0) \quad (2.14)$$

$$[\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta(n+m, 0) \quad (2.15)$$

$$[L_n, \bar{L}_m] = 0 . \quad (2.16)$$

Notons que les dilatations sont engendrées par $L_0 + \bar{L}_0$, qui correspondent à des translations dans le temps dans la quantification radiale. L'hamiltonien du système est donc proportionnel à $L_0 + \bar{L}_0$. Comme expliqué précédemment, l'espace de Hilbert est engendré par l'action des champs sur le vide et on définit le vecteur $|\phi\rangle$ par $\phi|0\rangle$ (on voit donc qu'un champ peut être aussi considéré comme un vecteur !). Si ϕ est un champ primaire, $|\phi\rangle$ vérifie :

$$L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle \quad \bar{L}_0|\phi\rangle = \bar{h}_\phi|\phi\rangle . \quad (2.17)$$

De plus :

$$L_n|\phi\rangle = 0 \text{ si } n > 0 \quad (2.18)$$

$$\bar{L}_n|\phi\rangle = 0 \text{ si } n > 0 . \quad (2.19)$$

Des états excités peuvent être obtenus en appliquant les L_n avec $n < 0$ sur $|\phi\rangle$. Les vecteurs du type $L_{-k_1}L_{-k_2}\dots L_{-k_n}|\phi\rangle$ (on ne considère que la partie holomorphe) sont appelés descendants de $|\phi\rangle$ d'ordre N , avec $N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Ces états ont une dimension holomorphe égale à $h_\phi + N$. L'espace de Hilbert est donc divisé en familles conformes, formant chacune un module de l'algèbre de Virasoro, appelé module de Verma. Dans les cas génériques, il y a une infinité de familles conformes, et pour un module donné le nombre d'états indépendants au niveau N est $p(N)$ le nombre de partitions de N , dont la fonction génératrice est :

$$\frac{1}{P(y)} = \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1}{1 - y^N} = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) y^N, \quad (2.20)$$

où P est la fonction d'Euler. Cependant, dans certains cas, il n'y a qu'un nombre fini de familles conformes, et un nombre d'états indépendants au niveau N plus petit que $p(N)$. On peut montrer que T est un descendant d'ordre deux de l'identité, ce qui confirme le fait que ce n'est pas un opérateur primaire.

2.1.3 Modèles minimaux

Le caractère d'un module de Verma $V(c, h_\phi)$ de charge centrale c et de plus haut poids $|\phi\rangle$ est par définition :

$$\tilde{K}_{(c, h_\phi)}(\tau) = \text{Tr } y^{L_0 - \frac{c}{24}} = \sum_{N=0}^{\infty} \dim(h_\phi + N) y^{N + h_\phi - \frac{c}{24}}, \quad (2.21)$$

où $y = \exp(2\pi i\tau)$ et $\dim(h_\phi + N)$ est la dimension de l'espace au niveau N . On a noté τ la variable dont dépendent les caractères. L'intérêt des caractères est qu'on peut les utiliser pour décomposer des fonctions de partition, on les évaluera alors en $\tau = i\frac{N}{T}$. Nous expliquerons aussi d'où vient le facteur $y^{-\frac{c}{24}}$. Dans les cas génériques, comme il y a $p(N)$ états indépendants au niveau N , en utilisant l'Eq. (2.20), on obtient que

$$\tilde{K}_{(c, h_\phi)}(\tau) = \frac{y^{h_\phi - \frac{c}{24}}}{P(y)} = \frac{y^{h_\phi + \frac{1-c}{24}}}{\eta(\tau)}, \quad (2.22)$$

où dans la dernière égalité, on a exprimé \tilde{K} à l'aide de la fonction de Dedekind définie par :

$$\eta(\tau) = y^{\frac{1}{24}} P(y). \quad (2.23)$$

Il peut cependant arriver que le module soit réductible, i.e. contienne un sous espace qui soit lui-même une représentation de l'algèbre de Virasoro. Ce sous module est engendré par un champ primaire, appelé vecteur "nul". En effet, on montre facilement que ce sous module est orthogonal à tout le module $V(c, h_\phi)$. Ce vecteur nul et ses descendants n'ont pas d'effet physique, c'est-à-dire qu'on peut quotienter le module générique par son (ou ses) sous modules nuls (dans tout ce chapitre nul est à prendre au sens de congruent à 0). On obtient alors un module irréductible, noté $M(c, h_\phi)$, dont le caractère n'est plus donné par l'Eq. (2.22). Notons dès à présent qu'on n'est pas obligé de quotienter le module, nous verrons que les formules obtenues faisant intervenir les caractères génériques K sont valables même lorsqu'il y a des sous modules nuls. Cependant, dans ce cas, ces formules se recombieront et se simplifieront.

L'étude du déterminant de Kac permet de déterminer pour quelles valeurs de c et h_ϕ le module $V(c, h_\phi)$ est réductible. On introduit le paramètre μ par :

$$c = 1 - \frac{6}{\mu(\mu + 1)} , \quad (2.24)$$

et les paramètres r et s par :

$$h_{r,s} = \frac{((\mu + 1)r - \mu s)^2 - 1}{4\mu(\mu + 1)} . \quad (2.25)$$

Lorsque μ prend des valeurs génériques, i.e. non rationnelles, $V(c, h_{r,s})$ est réductible pour r et s entiers non nuls, le vecteur nul apparaissant au niveau rs , de dimension $h_{r,-s} = h_{r,s} + rs$. De plus, en étudiant les OPE, on peut montrer qu'une théorie ne contenant que des champs primaires de dimension $h_{r,s}$ avec r et s entiers est bien stable sous l'algèbre des opérateurs. Les caractères associés aux $M(c, h_{r,s})$ sont :

$$K_{r,s}(y) = \tilde{K}_{r,s} - \tilde{K}_{r,-s} = \frac{y^{h_{r,s}-c/24} - y^{h_{r,-s}-c/24}}{P(y)} . \quad (2.26)$$

Lorsqu'en plus μ prend des valeurs rationnelles, les $V(c, h_{r,s})$ contiennent alors une infinité de vecteurs nuls. En effet, il y a un second vecteur nul au niveau $(p_2 - r)(p_1 - s)$, en ayant posé $\mu = \frac{p_2}{p_1 - p_2}$, avec p_1 et p_2 premiers entre eux. Cependant, les deux sous modules nuls ont une intersection non vide, et contiennent eux-même des sous modules nuls. Feigin et Fuchs ont étudié précisément leur structure [83]. On montre alors que le caractère associé à $M(c, h_{r,s})$ est [31] :

$$\chi_{r,s}(y) = \frac{y^{-\frac{c}{24}}}{P(y)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(y^{\frac{(2p_1 p_2 n + p_1 r - p_2 s)^2}{4p_1 p_2}} - y^{\frac{(2p_1 p_2 n + p_1 r + p_2 s)^2}{4p_1 p_2}} \right) . \quad (2.27)$$

Cette équation est appelée formule de Rocha-Caridi. Du fait de la périodicité des $h_{r,s}$, on peut se restreindre à $1 \leq r < p_2$ et $1 \leq s < p_1$, et on aura $\phi_{r,s} = \phi_{p_2-r, p_1-s}$. Le rectangle correspondant dans le plan (r, s) est appelé table de Kac. On a donc un nombre fini d'opérateurs primaires, c'est pourquoi on appelle ces théories modèles minimaux, notés $M(p_1, p_2)$. L'avantage de ces théories est que toutes les fonctions de corrélation sont simplement calculables, car le fait qu'il y ait des vecteurs nuls imposent des contraintes sur ces dernières, qui se traduisent sous forme d'équations différentielles.

Le cas où μ est entier (et donc $p_1 = \mu + 1$ et $p_2 = \mu$) correspond à une théorie minimale et unitaire $M(\mu + 1, \mu)$. En effet, on peut montrer qu'aucun vecteur n'a de norme négative dans ce cas. Ces théories ont été énormément étudiées. Le premier cas non trivial est $M(4, 3)$. Il y a trois opérateurs primaires : $\phi_{1,1}$ (ou $\phi_{2,3}$), $\phi_{2,2}$ (ou $\phi_{1,2}$), et $\phi_{2,1}$ (ou $\phi_{1,3}$). Les règles de fusion sont :

$$\phi_{1,1} \times \phi_{1,1} = [\phi_{1,1}] \quad (2.28)$$

$$\phi_{2,2} \times \phi_{2,2} = [\phi_{1,1}] + [\phi_{2,1}] \quad (2.29)$$

$$\phi_{2,2} \times \phi_{2,1} = [\phi_{2,2}] \quad (2.30)$$

$$\phi_{2,1} \times \phi_{2,1} = [\phi_{1,1}] . \quad (2.31)$$

Nous avons indiqué uniquement les opérateurs primaires, les coefficients des descendants étant facilement calculables une fois les coefficients des opérateurs primaires connus. $[\phi_{r,s}]$ représente

donc la famille conforme associée au champ primaire $\phi_{r,s}$. Notons que nous n'avons pour l'instant considéré que la composante holomorphe des champs. Il reste à savoir comment elle est couplée à la composante antiholomorphe. Comme nous le verrons, du fait de l'invariance modulaire, on ne peut pas associer n'importe comment ces deux parties. Dans le cas $M(4,3)$, la seule possibilité est d'avoir des champs sans spin, i.e. tels que $\bar{h} = h$. Cette possibilité existe pour toutes les théories, mais il peut y en avoir d'autres. De plus, une fois ce problème réglé, il reste à savoir comment interpréter ces champs. Il est évident que $\phi_{1,1}$, de dimension nulle, correspond à l'opérateur identité, mais les sens physiques de $\phi_{2,2}$ et $\phi_{2,1}$ ne le sont pas a priori. En fait, on peut montrer que $M(4,3)$ correspond au modèle d'Ising, et que $\phi_{2,2}$ et $\phi_{2,1}$ sont respectivement des opérateurs de spin σ et d'énergie ϵ . Les règles de fusion sont en effet bien compatibles avec la symétrie Z_2 du modèle ($\sigma \rightarrow -\sigma$).

Dans la suite, nous serons en particulier intéressés par les champs du type $\phi_{1,2l+1}$. Pour ces champs, la formule de Rocha-Caridi (2.27) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\chi_{1,2l+1}(y) = K_{1,2l+1}(y) - K_{1,2l_1+1}(y) + K_{1,2l_2+1}(y) - \dots, \quad (2.32)$$

i.e. comme une somme infinie de $(-1)^k K_{1,2l_k+1}$, avec $l_1 = \mu - l$, $l_2 = l + \mu - 1$, $l_3 = 2\mu - 1 - l$, $l_4 = l + 2\mu - 2$, etc. Cette formule s'interprète facilement à l'aide du principe d'inclusion-exclusion. On soustrait les caractères K associés aux sous-modules nuls, mais comme il y a des recouvrements entre ces sous-modules il est nécessaire d'ajouter les caractères correspondants. En particulier, l'ensemble des opérateurs contenus dans $\chi_{1,2l+1}$ est un sous-ensemble des opérateurs contenus dans $K_{1,2l+1}(y)$, à savoir tous les opérateurs non nuls de $K_{1,2l+1}(y)$.

2.1.4 Modèles parafermioniques

Le système peut avoir une symétrie plus grande que l'invariance conforme. Les modèles parafermioniques décrivent les systèmes qui possèdent, en plus de la symétrie conforme, une symétrie globale sous Z_N . A la symétrie Z_N correspondent $2 \left[\frac{N}{2} \right]$ courants parafermioniques ψ_k , appelés aussi parafermions, car leur spin est fractionnaire. Il existe plusieurs théories parafermioniques. Nous exposons ici uniquement celle dont nous allons avoir besoin dans la suite, à savoir l'une des deux théories introduites par Fateev et Zamolodchikov [57].

Les ψ_k correspondent à une charge k définie modulo N , et ont une algèbre de type Z_N , les charges s'additionnant :

$$\psi_k \psi_l = [\psi_{k+l}] \quad (2.33)$$

$$\psi_k \psi_{-k} = [\text{Id}]. \quad (2.34)$$

L'étude se fait de manière analogue au cas des modèles minimaux, excepté qu'en plus des L_n il y a les ψ_k . La charge centrale est donnée par :

$$c = 2 - \frac{6}{N+2}. \quad (2.35)$$

Il y a $\left[\frac{N}{2} \right] + 1$ opérateurs primaires de l'algèbre parafermionique, notés ϕ_k ($k = 0, \dots, N-1$), de dimension :

$$h_k = \frac{k(N-k)}{2N(N+2)}. \quad (2.36)$$

Notons que ϕ_k et ϕ_{N-k} ont même dimension : cette théorie est en plus invariante sous conjugaison de charge $k \rightarrow N-k$, et de ce fait il y a beaucoup de champs qui sont doublement

dégénérés. Parmi les descendants des ϕ_k , on trouve $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ opérateurs ϵ_l ($l = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$), qui sont des singlets par conjugaison de charge, et sont primaires par rapport à l'algèbre de Virasoro. Leurs dimensions sont :

$$h_l = \frac{l(l+1)}{N+2} . \quad (2.37)$$

L'analogue de $K_{1,2l+1}$ pour ces opérateurs ϵ_l est donné par [84] :

$$K_l = \frac{y^{(h_l - \frac{c}{24})}}{P^2(y)} \left(1 + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^{2n^2 + n(2l+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} y^{2(n+\frac{1}{2})^2 + (n+\frac{1}{2})(2l+1)} \right) \right) , \quad (2.38)$$

tandis que l'analogue de χ_l est donné par une expression similaire à l'Eq. (2.32), μ étant remplacé par $N+1$.

La théorie, bien que définie initialement pour N entier, peut être prolongée aux valeurs de N réelles, les K_l étant toujours bien définis, mais évidemment pas les χ_l ($N+1$ joue un rôle analogue au μ des modèles minimaux).

2.1.5 Conditions aux limites toroïdales

Nous exposons maintenant le calcul de fonctions de partition pour diverses conditions aux limites. C'est principalement Cardy qui s'est intéressé à ce problème. Nous commençons par des conditions aux limites toroïdales, i.e. nous considérons un système défini sur un tore, ce cas de figure étant très fréquent. Pour cela, nous considérons le tore comme un cylindre de circonférence L et de longueur finie N dont les deux extrémités ont été reliées. Cardy a étudié ces conditions aux limites dans [67]. Itzykson et Zuber [9], puis Cappelli, Itzykson et Zuber [10] ont classifié les fonctions de partition sur le tore qui sont invariantes modulaires [10]. Nous présentons dans cette sous-section leurs travaux.

La transformation conforme $z \rightarrow w = \frac{L}{2\pi} \ln z$ met en bijection le plan infini et un cylindre de circonférence L et de longueur infinie. En considérant la transformation du tenseur d'énergie impulsion T , on obtient que :

$$T_{\text{cyl}}(w) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left(T_{\text{pl}}(z) z^2 - \frac{c}{24} \right) \quad (2.39)$$

et donc, comme $\langle T_{\text{pl}}(z) \rangle = 0$ (dans la limite continue, on prend une énergie libre nulle pour un plan infini), on obtient que $\langle T_{\text{cyl}}(w) \rangle = -\frac{c\pi^2}{6L^2}$. La charge centrale est donc reliée à l'énergie de Casimir : la densité d'énergie n'est pas nulle sur un cylindre. En utilisant le lien entre l'énergie libre par unité de longueur f_L et T , on trouve que :

$$\beta f_L = -\frac{\pi c}{6L} . \quad (2.40)$$

Cette relation est essentielle afin d'interpréter les effets de taille finie, comme nous le verrons dans la section 2. On en déduit que l'hamiltonien du système sur le cylindre est donné par :

$$H = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) , \quad (2.41)$$

qu'on décompose en une partie holomorphe $H_R = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right)$ et une partie antiholomorphe $H_L = \frac{2\pi}{L} \left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24} \right)$. Il est très facile d'interpréter H en utilisant la bijection entre le plan et

le cylindre et en se rappelant le choix du temps lors de la quantification radiale. En effet, par application de la transformation conforme, on en déduit que l'axe du temps est selon l'axe du cylindre. Cela permettra de faire le lien avec les matrices de transfert dans la section 2.2.

La fonction de partition sur le tore Z est donnée par :

$$Z(\tau) = \text{Tr} [\exp(-HN)] = \text{Tr} \left[y^{L_0 - c/24} \bar{y}^{\bar{L}_0 - c/24} \right] . \quad (2.42)$$

Du fait de l'invariance par dilatation, Z ne dépend que de $\tau = i\frac{N}{L}$, i.e. du rapport entre longueur et largeur. On rappelle que $y = \exp(2\pi i\tau)$ et on pose $\bar{y} = \exp(-2\pi i\bar{\tau})$. Rappelons que la trace a lieu sur l'espace de Hilbert, constitué des champs de la théorie. On peut ainsi développer $Z(\tau)$ comme une somme de caractères (les \tilde{K} , K ou χ selon la théorie). Notamment, dans le cas d'une théorie minimale, on a :

$$Z(\tau) = \sum_{h, \bar{h}} M_{h, \bar{h}} \chi_h(y) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{y}) , \quad (2.43)$$

où $M_{h, \bar{h}}$ est le nombre de champs primaires de la théorie ayant une dimension holomorphe égale à h et une dimension antiholomorphe égale à \bar{h} , et indique comment les secteurs holomorphes et antiholomorphes sont couplés. La fonction de partition Z doit être invariante sous les transformations suivantes, appelées transformations modulaires [67] :

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \text{ avec } ad - bc = 1 . \quad (2.44)$$

En effet, ces transformations correspondent à changer la direction de l'axe des temps sans modifier la géométrie toroïdale (τ correspond alors au rapport entre les vecteurs principaux du tore) et donc la direction du temps étant arbitraire Z doit être inchangée. Cela implique que toutes les valeurs de $M_{h, \bar{h}}$ ne sont pas possibles [10]. Une solution simple est donnée par $M_{h, \bar{h}} = \delta(h, \bar{h})$. Cependant, d'autres solutions correspondant à un couplage non trivial des secteurs peuvent exister. Ainsi, dans le cas des modèles minimaux $M(4, 3)$ et $M(5, 4)$ seule la solution triviale est possible, et donc par exemple la fonction de partition de $M(4, 3)$ est donnée par :

$$Z = \chi_0 \bar{\chi}_0 + \chi_{\frac{1}{16}} \bar{\chi}_{\frac{1}{16}} + \chi_{\frac{1}{2}} \bar{\chi}_{\frac{1}{2}} . \quad (2.45)$$

Par contre, à partir de $M(6, 5)$ d'autres solutions sont possibles. En particulier, le modèle de Potts à trois états est une solution non triviale.

Il faut bien comprendre les implications de l'Eq. (2.41). Le spectre de H_L est de la forme :

$$E_x = -\frac{\pi c}{6L} + \frac{2\pi x}{L} , \quad (2.46)$$

où les x sont les dimensions d'échelle des champs de la théorie. Ainsi, en connaissant le spectre de H_L , on connaît les champs présents. Le niveau d'énergie le plus bas correspond à l'opérateur identité, et vaut $-\frac{\pi c}{6L}$ (on suppose que les autres opérateurs ont $x > 0$ comme c'est habituellement le cas), ce qui permet de déterminer la charge centrale lorsqu'on connaît le spectre pour différentes valeurs de L . L'identité a une série de descendants ayant des valeurs de x entières, dont les dégénérescences pour x donné sont égales au nombre de descendants indépendants avec cette valeur de x . Il y a aussi des séries associées aux autres opérateurs primaires : au sein de chaque série, les valeurs de x diffèrent par des entiers. A l'aide du spectre, on peut en particulier connaître les dimensions x de tous les opérateurs primaires du système. Bien évidemment, en

pratique, on a un système fini sur réseau, pas un système continu, et nous verrons section 2 comment procéder.

Le système peut avoir des conditions aux limites plus exotiques, comme des conditions aux limites twistées selon la largeur [11],[85]. Cela s'interprète en introduisant une ligne de coupure traversant le tore en longueur, appelée ligne de frustration, et en disant qu'en traversant cette ligne on ne revient pas dans le même état qu'au départ. Par exemple, il peut être nécessaire de traverser deux fois la ligne, i.e. faire deux fois le tour du tore selon la largeur, pour revenir à l'état de départ. En revenant au plan complexe, cela revient à appliquer un opérateur ϕ_d , de dimension x_d , qui va changer les conditions aux limites. Les exposants x correspondant au spectre de l'hamiltonien avec conditions aux limites twistées sont les dimensions des opérateurs obtenus par produit entre les opérateurs de la théorie et l'opérateur ϕ_d . En particulier, le niveau d'énergie le plus bas est $-\frac{\pi c}{6L} + \frac{2\pi x_d}{L}$. Par conséquent, dans la limite $\tau \rightarrow \infty$, i.e. pour un cylindre infini de largeur L , le rapport entre fonction de partition twistée et non twistée vaut :

$$\frac{Z_t(\tau)}{Z(\tau)} = \exp(-2\pi x_d \tau) . \quad (2.47)$$

Or, à l'aide de la bijection entre le plan et le cylindre, on peut montrer que la fonction de corrélation sur le cylindre des champs ϕ sont de la forme, dans la limite d'une distance τ beaucoup plus grande que L :

$$\langle \phi(0)\phi(\tau) \rangle \propto \exp(-2\pi x \tau) , \quad (2.48)$$

i.e. que la longueur de corrélation ξ des champs est reliée à leur dimension d'échelle et vaut $\xi = \frac{1}{2\pi x}$. En comparant les Eq. (2.47) et (2.48), on en déduit que, dans la limite $\tau \rightarrow \infty$:

$$\frac{Z_t(\tau)}{Z(\tau)} \propto \langle \phi_d(0)\phi_d(\tau) \rangle . \quad (2.49)$$

Le rapport entre fonctions de partition twistée et non twistée est donc égal à la fonction de corrélation de ϕ_d . Notons que ϕ_d est un opérateur non local par rapport aux autres champs de la théorie, puisqu'en traversant la ligne de frustration l'état des autres champs est changé. Un tel opérateur est appelé opérateur de désordre.

On peut aussi twister le modèle suivant la longueur. L'hamiltonien et donc le contenu en opérateurs de la théorie est alors inchangé, mais la fonction de partition Z n'est plus simplement donnée par une trace, et donc les coefficients devant les caractères ne sont plus égaux aux nombres de champs primaires du type considéré.

2.1.6 Conditions aux limites fixées

Considérons maintenant le cas où les CL sont fixées au bord (CL α d'un coté et β de l'autre) selon la largeur, et périodiques selon la longueur. En notant $H_{\alpha\beta}$ l'hamiltonien correspondant, la fonction de partition est :

$$Z_{\alpha\beta}(\tau) = \text{Tr} [\exp(-H_{\alpha\beta} N)] . \quad (2.50)$$

Pour déterminer le spectre de $H_{\alpha\beta}$, on considère la bijection entre le demi-plan supérieur et un ruban infiniment long de largeur L . Le groupe de symétrie à considérer est le groupe des

transformations conformes *laissant invariant le demi-plan supérieur*. De ce fait, seuls les L_n sont présents, pas les \bar{L}_n : seul le secteur holomorphe est à considérer. Pour un modèle minimal, $Z_{\alpha\beta}$ a donc la forme :

$$Z_{\alpha\beta}(\tau) = \sum_h n_{\alpha\beta}^h \chi_h(y) , \quad (2.51)$$

y étant défini comme précédemment, et $n_{\alpha\beta}^h$ étant le nombre de champs primaires de dimension holomorphe h . Le calcul des $n_{\alpha\beta}^h$ se fait en utilisant l'invariance modulaire, en l'occurrence en inversant longueur et largeur. Dans les cas simples (théories diagonales sur le tore et représentations autoconjuguées), Cardy a introduit des opérateurs de bord, permettant de changer les CL, de manière analogue aux opérateurs de désordre dans le cas des CL twistées [11], [12]. Ainsi, on définit H_{00} comme l'hamiltonien avec des CL telles qu'il ne contienne que le secteur de l'identité, puis d'autres CL appelées CL invariantes conformes telles qu'elles reviennent à insérer des opérateurs de bord. Ainsi H_{0h} contient uniquement ϕ_h et donc : $Z_{0h}(\tau) = \chi_h(y)$. En considérant la limite $\tau \rightarrow \infty$, on peut montrer une formule analogue à l'Eq. (2.49) :

$$\frac{Z_{0h}(\tau)}{Z_{00}(\tau)} \propto \langle \phi_h(0) \phi_h(\tau) \rangle . \quad (2.52)$$

Plus généralement, $H_{\alpha\beta}$ correspond à $\phi_\alpha \phi_\beta$, et donc $n_{\alpha\beta}^h$ est le coefficient de fusion devant ϕ_h dans l'OPE de ϕ_α par ϕ_β .

Prenons comme exemple le modèle d'Ising, i.e. $M(4,3)$. Il y a trois conditions aux limites invariantes conforme : 0, $\frac{1}{16}$, et $\frac{1}{2}$. On peut montrer que 0 correspond à des spins fixés dans l'état +, $\frac{1}{16}$ à des CL libres, et $\frac{1}{2}$ à des spins fixés dans l'état -. Les valeurs de h correspondant aux différentes CL possibles sont donc :

$$(+, +) \text{ ou } (-, -) : h = 0 \quad (2.53)$$

$$(f, f) : h = 0, \frac{1}{2} \quad (2.54)$$

$$(+, -) : h = \frac{1}{2} \quad (2.55)$$

$$(+, f) \text{ ou } (-, f) : h = \frac{1}{16} . \quad (2.56)$$

En effet, $(+, +)$ est associé à l'opérateur Id, de dimension holomorphe $h = 0$. $(+-)$ correspond à changer d'un côté les CL en insérant l'opérateur $\phi_{\frac{1}{2}}$, de dimension $h = \frac{1}{2}$. $(--)$ correspond à l'insertion de $\phi_{\frac{1}{2}}$ de chaque côté, et donc en utilisant la règle de fusion donnée Eq. (2.31), à savoir $\phi_{\frac{1}{2}} \times \phi_{\frac{1}{2}} = Id$, on trouve bien que la seule valeur de h contribuant est $h = 0$. De même, $(+, f)$ correspond à l'insertion de $\phi_{\frac{1}{16}}$, (f, f) à $\phi_{\frac{1}{16}} \times \phi_{\frac{1}{16}} = Id + \phi_{\frac{1}{2}}$ d'après l'Eq. (2.30), et enfin $(-, f)$ à $\phi_{\frac{1}{2}} \times \phi_{\frac{1}{16}} = \phi_{\frac{1}{16}}$ d'après l'Eq. (2.31). Notons que $(+, +)$ et $(-, -)$ correspondent bien au même contenu en opérateurs, puisque le modèle d'Ising est symétrique sous renversement des spins.

Dans le cas général il n'est pas évident de savoir à quelles CL au niveau microscopique correspondent les CL invariantes conformes. Même remarque pour la signification microscopique des opérateurs de bord. Ainsi, pour le modèle d'Ising, le spin correspond à $\phi_{\frac{1}{16}, \frac{1}{16}}$ pour les opérateurs dans le cas usuel, tandis qu'il correspond à $\phi_{\frac{1}{2}}$ pour les opérateurs de bord.

2.1.7 Théorème c

Jusqu'à présent, nous nous sommes toujours placés au point fixe. Lorsque le système n'est pas au point fixe, il n'y a plus invariance conforme, mais par renormalisation il a un flot vers un point fixe. Si ce point fixe correspond à une transition de phase du second ordre, le système sera critique au sens où sa longueur de corrélation est infinie. On peut donc là encore oublier les détails du réseau et travailler avec une théorie des champs, à condition d'introduire un cut-off (les champs n'étant renormalisables qu'au point fixe). Le point fixe vers lequel le système tend par renormalisation est appelé point fixe infrarouge (IR), et au contraire le point fixe duquel le système s'éloigne par renormalisation est appelé point fixe ultraviolet (UV). A courte distance (mais plus grande que le cut-off), le système se comporte comme au point fixe UV, tandis qu'à grande distance, il se comporte comme au point fixe IR.

Zamolodchikov a utilisé le fait qu'il existe un flot de renormalisation allant du point UV au point IR pour en déduire que les champs primaires IR sont des combinaisons perturbatives de champs primaires UV. Il a ainsi déterminé perturbativement les coefficients correspondants dans le cas où le système flotte d'un modèle $M(m+1, m)$ vers $M(m, m-1)$. De plus, il a démontré que si la théorie est unitaire, il existe une fonction décroissante du flot dont la valeur est égale à la charge centrale aux niveaux des points fixes [13]. On en déduit donc que la charge centrale du point IR est inférieure à celle du point UV. Effectivement, dans le cas des modèles minimaux unitaires, c diminue lorsque m diminue. De plus, cela donne une interprétation intuitive à c comme nombre de degrés de liberté du système, diminuant par renormalisation.

2.2 Matrice de transfert

2.2.1 Représentation en spins

Après cette longue digression, revenons au modèle de Potts, défini sur un réseau de largeur L et de longueur N . Pour l'étudier, on utilise ce qu'on appelle une matrice de transfert T . L'idée est de construire le réseau colonne par colonne, T étant une matrice qui rajoute une colonne (on prend par convention une direction de propagation horizontale, une direction de propagation verticale correspondrait à construire le réseau ligne par ligne). Ainsi, en appliquant N fois T , on construit tout le réseau. Nous suivons la présentation de Salas et Sokal [14].

La fonction de partition du système s'écrit sous la forme :

$$Z(Q, v) = \text{Tr} [A(Q, v) T(Q, v)^N] . \quad (2.57)$$

Les dépendances en Q et v ont été écrites explicitement. T dépend de L et des CL transverses. Au contraire, $A(Q, v)$ est une matrice prenant en compte les CL longitudinales. L'intérêt de T est de transformer un problème de physique statistique classique en deux dimensions en un problème de mécanique quantique à une seule dimension. En effet, l'Eq. (2.57) se réécrit comme :

$$Z(Q, v) = \sum_{k=1}^{\dim(T)} \alpha_k(Q, v) \lambda_k(Q, v)^N , \quad (2.58)$$

où les λ_k sont les $\dim(T)$ valeurs propres de T , et les $\alpha_k(Q, v)$ sont leurs amplitudes, i.e. le poids avec lesquels elles interviennent dans Z .

Pour un modèle donné, il peut exister plusieurs matrices de transfert, ayant des dimensions $\dim(T)$ et des matrices A différentes, selon la représentation choisie. Nous considérons dans cette section uniquement la représentation en spins, du fait de sa simplicité, et donc nous nous restreignons à des valeurs de Q entières. Ce n'est que dans la section suivante que nous discuterons le cas des autres représentations. On considère un réseau G formé de N couches identiques de largeur L avec des liens entre couches se répétant de façon régulière. On repère les sites de G à l'aide de deux entiers (i, n) , i ($1 \leq i \leq L$) et n ($1 \leq n \leq N$) correspondant respectivement à la position en largeur, i.e. au sein de la couche, et à la position en longueur, i.e. au numéro de la couche. Il y a deux types de liens : les liens "verticaux", i.e. les liens au sein d'une couche qu'on note E_v , et les liens "horizontaux" et "diagonaux", i.e. les liens entre couches successives qu'on note E_h . Nous nous sommes placés dans un cas très général, et en particulier l'étude est valable pour un réseau carré ou triangulaire avec des CL transverses périodiques ou libres. Ainsi, par exemple, pour un réseau carré avec CL transverses périodiques, $E_v = \{ \langle (i, n), (i+1, n) \rangle, 1 \leq i \leq L \}$ et $E_h = \{ \langle (i, n), (i, n+1) \rangle, 1 \leq i \leq L \}$ pour n donné. La matrice de transfert T agit sur l'espace de configurations des spins d'une seule couche, dénoté $|\sigma\rangle$. Sa dimension $\dim(T)$ est donc Q^L . On décompose T comme produit de deux matrices V et H , correspondant respectivement aux poids des liens verticaux et horizontaux. On a ainsi :

$$\langle \sigma' | V | \sigma \rangle = \delta(\sigma, \sigma') \prod_{\langle ii' \rangle \in E_v} [1 + v \delta(\sigma_i, \sigma_{i'})] \quad (2.59)$$

$$\langle \sigma' | H | \sigma \rangle = \prod_{\langle ii' \rangle \in E_h} [1 + v \delta(\sigma_i, \sigma'_{i'})] \quad (2.60)$$

et T est donnée par :

$$T = H V . \quad (2.61)$$

L'expression de Z en fonction de T dépend des CL longitudinales, voir l'Eq. (2.57). Avec des CL longitudinales périodiques, on a simplement $Z(Q, v) = \text{Tr} [T(Q, v)^N]$ c'est-à-dire que les amplitudes des valeurs propres de T sont toutes égales à 1. Pour des CL longitudinales libres, on a $Z(Q, v) = \langle \mathbf{1} | V T(Q, v)^{N-1} | \mathbf{1} \rangle$. En effet, comme les CL sont libres, l'état de spin de départ est $|\mathbf{1}\rangle$, vecteur avec toutes les composantes égales à 1. Ensuite, pour construire le réseau il faut appliquer $N - 1$ fois T puis V afin de mettre les liens verticaux sur la dernière couche, l'état de spin final devant être aussi $|\mathbf{1}\rangle$.

Dans la plupart des cas, afin de faciliter le calcul de T , on peut la décomposer en produits de matrices élémentaires. On définit les matrices D_i et $J_{i,i'}$ par :

$$\langle \sigma' | D_i | \sigma \rangle = \prod_{i' \neq i} \delta(\sigma_{i'}, \sigma'_{i'}) \quad (2.62)$$

$$\langle \sigma' | J_{i,i'} | \sigma \rangle = \delta(\sigma_i, \sigma_{i'}) \delta(\sigma, \sigma') . \quad (2.63)$$

D_i est un opérateur de détachement : il déconnecte les deux couches au site i . $J_{i,i'}$ est un opérateur de liaison : il lie les spins i et i' au sein d'une couche. Nous verrons sous-section 2.2.4 qu'à une normalisation près ces opérateurs constituent une algèbre de Temperley-Lieb. Ces matrices permettent de construire les matrices élémentaires suivantes :

$$V_i = I + v J_{i,i+1} \quad (2.64)$$

$$H_i = vI + D \quad (2.65)$$

correspondant respectivement à ajouter un lien vertical et un lien horizontal. Pour un réseau carré ou triangulaire avec des CL transverses libres ou périodiques, on a les décompositions de V suivantes :

$$V_{\text{carré}}^{\text{libre}} = V_{\text{tri}}^{\text{libre}} = V_{L-1} \dots V_2 V_1 \quad (2.66)$$

$$V_{\text{carré}}^{\text{per}} = V_L V_{L-1} \dots V_2 V_1 \quad (2.67)$$

et les décompositions de H suivantes :

$$H_{\text{carré}}^{\text{libre}} = H_{\text{carré}}^{\text{per}} = H_L H_{L-1} \dots H_2 H_1 \quad (2.68)$$

$$H_{\text{tri}}^{\text{libre}} = H_L V_{L-1} H_{L-1} \dots V_2 H_2 V_1 H_1 . \quad (2.69)$$

Ces différentes expressions se comprennent facilement, excepté la dernière. Pour mettre les liens diagonaux du réseau triangulaire, on utilise les matrices V_i intercalées entre H_i et H_{i-1} , de cette façon on a propagé uniquement le site $i - 1$ et pas le site i au moment où on applique V_i , et donc le lien "vertical" est en fait un lien diagonal. Le cas d'un réseau triangulaire avec des CL transverses périodiques est particulier, car on ne peut pas traiter correctement le dernier lien diagonal entre les lignes L et 1 . Pour résoudre ce problème, on travaille avec $L + 1$ spins, et on identifie le $L + 1$ ème avec le premier grâce à l'opérateur $J_{L+1,1}$. Les matrices V et H de dimension Q^{L+1} sont données par :

$$V_{\text{tri}}^{\text{per}} = J_{L+1,1} V_L V_{L-1} \dots V_2 V_1 \quad (2.70)$$

$$H_{\text{tri}}^{\text{per}} = V_L H_L V_{L-1} H_{L-1} \dots V_2 H_2 V_1 H_1 . \quad (2.71)$$

2.2.2 Représentation en amas

La représentation en spins a comme avantage de donner des poids simples aux valeurs propres de T . Cependant, elle n'existe que pour Q entier. Pour Q générique, il est nécessaire d'utiliser le développement en amas de Z , voir Eq. (1.9), ou bien le développement en boucles équivalent. Notons que comme à une configuration d'amas sur le réseau G est associée de façon biunivoque une configuration de boucles sur le réseau médial M de G , les deux représentations sont équivalentes (en particulier les matrices de transfert ont même dimension). Ce sont Blöte et Nightingale [27] qui ont construit une matrice de transfert dans la représentation en amas, et nous exposons dans cette sous-section la façon de procéder.

Le problème est que les amas sont des objets non locaux, donc le facteur $Q^{n(G')}$ est non local. La procédure est donc la suivante : on construit G' couche par couche, en considérant les connectivités des sites de la couche considérée, compte tenu des couches précédentes. T agit donc sur l'espace des connectivités possibles pour une colonne. On dénote les vecteurs de base $|v_P\rangle$, P étant une partition de taille L (les sites étant dans la même partition sont connectés). L'opérateur de détachement D_i est défini par :

$$D_i |v_P\rangle = |v_{P \setminus i}\rangle \text{ si } \{i\} \notin P \quad (2.72)$$

$$D_i |v_P\rangle = Q |v_P\rangle \text{ si } \{i\} \in P \quad (2.73)$$

tandis que l'opérateur de liaison $J_{i,i'}$ est défini par :

$$J_{i,i'} |v_P\rangle = |v_{P \bullet ii'}\rangle \quad (2.74)$$

où $P \setminus i$ est la partition obtenue à partir de P en isolant i , et $P \bullet ii'$ est la partition obtenue en amalgamant les blocs contenant i et i' . Ces opérateurs sont donc les analogues des opérateurs de détachement et de liaison vus pour la représentation en spin.

On définit les matrices de transfert élémentaires et la matrice de transfert T de manière analogue à la sous section précédente. Il reste à savoir quels sont les états de départ et d'arrivée, afin d'implémenter les CL longitudinales. Lorsqu'elles sont périodiques, on ne peut pas en fait utiliser T , car les première et dernière couches devant être identifiées, on verra chapitre 3 qu'il est nécessaire de tenir compte des connectivités de la dernière couche, et nous définirons donc une matrice de transfert plus grande. Par contre, le cas de CL libres ne posent pas de problème. En effet, l'état de départ est $|v_{\text{Id}}\rangle$, où Id est la partition où chaque site est un singleton : en l'absence de liens, aucun site n'est relié ! L'état final $|u\rangle$ est un état permettant d'attribuer les facteurs de Q aux amas se terminant au niveau de la dernière couche. $|u\rangle$ est ainsi défini par :

$$\langle u | v_P \rangle = Q^{|P|} . \quad (2.75)$$

La fonction de partition est donnée par :

$$Z = \langle u | H T^{N-1} | v_{\text{Id}} \rangle . \quad (2.76)$$

Il est important de noter que pour Q entier on peut aussi bien utiliser la représentation en spins que la représentation en amas. Pourtant, bien que la fonction de partition Z ne change pas, les matrices de transfert sont différentes : elles n'agissent pas sur le même espace. Ainsi, la dimension de T dans la représentation en amas n'est pas Q^L mais le nombre de partitions possibles au sein d'une couche. Déterminons cette dimension $\dim(T)$. Des détails sur les dénombrements de ce type peuvent être trouvés dans les deux livres de Stanley [76], ainsi que dans l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers [77]. Le nombre de partitions de $\{1, \dots, L\}$ est donné par le nombre de Bell $B(L)$, dont la fonction génératrice est :

$$E_B(x) = \sum_{L=0}^{\infty} B(L) \frac{x^L}{L!} = \exp(\exp(x) - 1) . \quad (2.77)$$

Cependant, comme $|v_{\text{Id}}\rangle$ est l'état de départ, et comme G est planaire (en effet, les CL longitudinales sont libres, le cas où les CL transverses et longitudinales sont toutes deux périodiques, i.e. le cas où les CL sont toroïdales, ne sera traité qu'au chapitre 6), seules les partitions sans croisement sont autorisées. Par conséquent, $\dim(T)$ est égale au nombre de partitions sans croisement de $\{1, \dots, L\}$, appelé nombre de Catalan C_L :

$$C_L = \frac{1}{L+1} \binom{2L}{L} . \quad (2.78)$$

C_L a un comportement asymptotique de la forme :

$$C_L \sim 4^L L^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} . \quad (2.79)$$

Pour L grand, $\dim(T)$ est en 4^L , tandis que dans la représentation en spins elle valait Q^L .

Pour Q (entier) supérieur à 4, T dans la représentation en spins contient trop de valeurs propres : certaines valeurs propres doivent en effet avoir forcément une amplitude nulle, Z devant être inchangé quelle que soit la représentation. Comme expliqué précédemment, les amplitudes

dépendent des CL longitudinales. Nous allons montrer qu'effectivement compte tenu du vecteur de départ avec des CL longitudinales libres, à savoir $|1\rangle$, de nombreuses amplitudes sont nulles. En effet, comme on part de $|1\rangle$, seul le sous espace engendré par les vecteurs obtenus par l'action de H et V sur $|1\rangle$ doit être considéré. Ces opérateurs sont constitués de fonctions δ , on peut prendre comme vecteurs de base les vecteurs v_P définis comme la somme des états des spins tels que les spins dans les mêmes blocs de P soient dans le même état. Par exemple, $|1\rangle$ correspond à $|v_{Id}\rangle$, c'est-à-dire au vecteur égal à la somme sur tous les états de spin. G étant planaire, seules les partitions P sans croisement sont possibles. On peut alors montrer que sur ces nouveaux vecteurs de base les actions des opérateurs de détachement et de liaison sont exactement les mêmes que dans la représentation en amas, ce qui permet de conclure que les deux représentations sont bien équivalentes. Lorsque Q est plus petit que la largeur L , le raisonnement précédent n'est plus strictement valable, car les vecteurs v_P définis ne sont plus indépendants. Cependant, par prolongement analytique en Q , on peut formellement les considérer comme indépendants, et étendre les résultats à toutes les valeurs de Q . En particulier, pour Q (entier) inférieur à 4, T dans la représentation en spins contient aussi trop de valeurs propres, même si sa dimension est plus petite que dans la représentation en amas ! Cela s'explique par le fait que dans la représentation en amas pour $Q < L$ des valeurs propres sont dégénérées, de sorte que le nombre de valeurs propres distinctes est plus grand dans la représentation en spins.

2.2.3 Cas de la température nulle et de symétries additionnelles

Un cas particulier intéressant est le cas d'un antiferromagnétique à température nulle, i.e. le cas où $v = -1$, car comme expliqué dans la sous-section 1.1.3, Z est alors égale au polynôme chromatique de G . Dans ce cas, les spins voisins doivent être dans des états différents, et on peut donc réduire la dimension de T . Mathématiquement, cela se traduit par le fait que l'opérateur V est un projecteur pour $v = -1$ sur l'espace engendré par les états de spins tels que deux spins voisins ne soient jamais dans le même état dans la représentation en spins, et un projecteur sur l'espace engendré par les connectivités telles que deux voisins ne soient pas dans le même bloc dans la représentation en amas. Calculons la dimension de T dans le cas où les CL longitudinales sont libres.

Il faut noter que la dimension dépend dans ce cas des CL transverses. En effet, dans le cas de CL transverses libres, les sites 1 et L ne sont pas voisins, tandis qu'ils le sont pour des CL transverses périodiques. Pour des CL transverses libres, $\dim(T)$ est le nombre de partitions sans croisement et sans voisins connectés de $1, \dots, L$, i.e. le nombre de Motzkin M_{L-1} donné par la formule [78],[79] :

$$M_L = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \binom{L}{2j} C_j . \quad (2.80)$$

Pour des CL transverses périodiques, il faut considérer le nombre de partitions sans croisement et sans voisins connectés de $1, \dots, L$ lorsque 1 et L sont considérés comme voisins. Ce nombre vaut 1 pour $L = 1$, et R_L pour $L \geq 2$, R_L étant un nombre de Riordan défini par [126] :

$$R_L = \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^{L-k-1} M_k . \quad (2.81)$$

Dans le cas d'un réseau carré, on peut aussi restreindre $\dim(T)$ en utilisant la symétrie par réflexion par rapport à l'axe central du réseau pour des CL transverses libres. On définit ainsi

des classes d'équivalence modulo la réflexion. Asymptotiquement, cela divise $\dim(T)$ par 2, comme la plupart des partitions ne sont pas symétriques par réflexion. Pour des CL transverses libres, en plus de la réflexion on a une symétrie sous translation : le groupe de symétrie est le groupe diédral D_L . On considère donc des classes de partition modulo D_L . Asymptotiquement, $\dim(T)$ est divisée par $2L$, la plupart des partitions étant asymétriques.

2.2.4 Algèbre de Temperley-Lieb et représentation en boucles

Même si les matrices de transfert sont différentes selon la représentation choisie, leur structure algébrique en est indépendante. En effet, les opérateurs de détachement et de liaison (et donc les matrices de transfert élémentaires) vérifient toujours les mêmes relations de commutation. Elles ont été étudiées par Temperley et Lieb [26].

Considérons le cas de CL transverses libres. Afin de mettre ces relations sous une forme bien connue, on définit les opérateurs e_i , $1 \leq i \leq 2L - 1$ par :

$$e_{2j-1} = Q^{-\frac{1}{2}} D_j \text{ pour } 1 \leq j \leq L \quad (2.82)$$

$$e_{2j} = Q^{\frac{1}{2}} J_{j,j+1} \text{ pour } 1 \leq j \leq L - 1. \quad (2.83)$$

Les e_i vérifient les relations caractéristiques de l'algèbre de Temperley-Lieb [26],[55] :

$$e_i^2 = Q^{\frac{1}{2}} e_i \quad (2.84)$$

$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i \quad (2.85)$$

$$e_i e_j = e_j e_i \text{ pour } |i - j| \geq 1. \quad (2.86)$$

Les matrices élémentaires V_i et H_i s'écrivent comme :

$$H_i = Q^{\frac{1}{2}} (x I + e_{2i-1}) \quad (2.87)$$

$$V_i = I + x e_{2i}, \quad (2.88)$$

où l'on rappelle que $x = \frac{v}{\sqrt{Q}}$. Dans la suite, pour simplifier, on ne mettra plus le facteur de $Q^{\frac{1}{2}}$ devant les H_i , ce qui fait qu'il faudra rajouter un facteur global de $Q^{\frac{S}{2}}$ devant la fonction de partition.

Le fait qu'il y ait un facteur global de $Q^{\frac{S}{2}}$ et que x apparaisse laisse penser que l'interprétation de ces relations algébriques est simple dans le cadre de la représentation en boucles. Effectivement, on peut écrire une matrice de transfert sur le réseau médial, en considérant pour une tranche donnée quelles sont les connectivités des boucles possibles, sachant qu'elles ne peuvent pas se couper. I correspond à laisser les bouts aller tout droit, tandis que e_i correspond à relier les i et $i + 1$ ièmes bouts et à commencer une nouvelle boucle. Compte-tenu du fait que les boucles ont un poids \sqrt{Q} , les relations de l'algèbre de Temperley-Lieb ont une interprétation graphique très simple, montrée dans la Fig. (2.1). Notons que les dimensions sont bien identiques entre les représentations en amas et en boucles. En effet, le nombre de partitions respectant la planarité de $\{1, \dots, L\}$ est égal à la façon de relier $2L$ bouts entre eux en respectant la planarité.

2.2.5 Spectre de la matrice de transfert

Comme montré dans l'Eq. (2.58), nous sommes intéressés par le spectre de T , car à condition de connaître les amplitudes α_k , on peut calculer la fonction de partition. Le spectre de T n'est

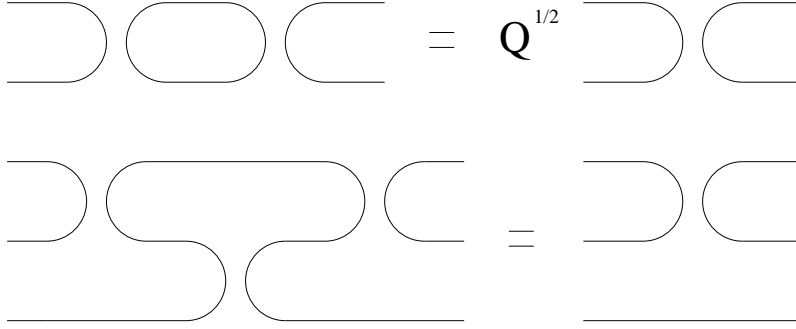


FIG. 2.1 – Représentation graphique des relations de commutation de l’algèbre de Temperley-Lieb. On utilise la représentation en boucles et le fait qu’une boucle a un poids \sqrt{Q} .

pas quelconque, notamment au point fixe, où l’invariance conforme est présente. Considérons pour le moment des CL transverses périodiques. Alors, en comparant les expressions (2.57) et (2.42), on voit que T joue un rôle analogue à $\exp(-H_L)$. Ce résultat est intuitif car, en considérant l’axe horizontal comme un axe des temps, T peut être vu comme un opérateur d’évolution durant un temps égal au pas du réseau. L et N ont ainsi des définitions équivalentes sections 2.1 et 2.2, excepté que section 2.1 ils sont définis dans la limite continue, tandis que section 2.2 ils sont définis à l’échelle du réseau. Par analogie avec l’Eq. (2.46), on définit une charge centrale effective $c_{\text{eff}}(L)$ et des dimensions d’échelle effectives x_{eff} par [127],[41],[15] :

$$f_k(L) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}(L)}{6L^2} + \frac{2\pi x_{\text{eff}}(L)}{L^2}, \quad (2.89)$$

où on a posé $f_k = -\frac{1}{bL} \log \lambda_k$, b étant le facteur d’isotropie du réseau. b correspond à la longueur d’un pas de temps à l’échelle du réseau. Il vaut 1 pour un réseau carré (lorsqu’on se propage selon un de ses axes), et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour un réseau triangulaire. Cela revient à normaliser les f_k par unité de surface du réseau.

Il faut noter que $c_{\text{eff}}(L)$ et x_{eff} dépendent de L , et que donc l’Eq. (2.89) ne dit pas que les corrections de taille finie aux f_k sont en $\frac{1}{L}$. En pratique, on procède de la façon suivante : on considère d’abord la valeur propre la plus grande de T , qui correspond donc au niveau d’énergie le plus bas f_0 , pour des largeurs L et $L+1$, et on détermine $c_{\text{eff}}(L)$ ($x_{\text{eff}}(L)$ étant par définition nul). Ensuite, on considère les valeurs propres plus basses et on détermine les $x_{\text{eff}}(L)$. Souvent, pour améliorer la convergence de ces grandeurs, on rajoute un terme en $\frac{1}{L^2}$ [41], ce qui permet d’utiliser trois largeurs $L-1$, L et $L+1$ pour déterminer $c_{\text{eff}}(L)$ et les $x_{\text{eff}}(L)$. Dans les cas simples où tous les f_k contribuent, par exemple dans le cas de CL longitudinales périodiques dans la représentation en spins, l’énergie libre par unité de surface du système est donnée par $f_0(L)$:

$$f_0(L) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}(L)}{6L^2}. \quad (2.90)$$

$c_{\text{eff}}(v, L)$ (nous écrivons maintenant explicitement la dépendance en v) permet de localiser les points fixes, en utilisant ce qu’on appelle la renormalisation phénoménologique, qui consiste à voir comment le système se comporte lorsqu’on change sa taille L . Lorsque la largeur L passe de L_1 à L_2 , on considère que le paramètre de température de départ v_1 est renormalisé en v_2 tel que :

$$c_{\text{eff}}(v_1, L_1) = c_{\text{eff}}(v_2, L_2). \quad (2.91)$$

En effet, $c_{\text{eff}}(v, L)$ est directement lié à l'énergie libre ce qui rend cette façon de procéder intuitive, même si elle n'est pas rigoureuse. Les points fixes v_f correspondent donc aux points dont la valeur de la charge centrale effective $c_{\text{eff}}(v_f, L)$ ne dépend pas de L , pour L grand (pour L petit, la procédure étant approchée, il y a une dépendance en L , il faut donc avoir des largeurs suffisamment grandes). Il y a deux types de points fixes : ceux stables dans l'I.R., attractifs lorsque L augmente, et ceux stables dans l'U.V., répulsifs lorsque L augmente. Notons que les points fixes correspondent donc à des minima et des maxima de c_{eff} . De plus, si l'on est dans les conditions de validité du théorème c , on s'attend à ce que les points fixes stables dans l'I.R. et stables dans l'U.V. correspondent respectivement à des minima et des maxima de c_{eff} . c_{eff} est donc l'analogue dans le cas discret de la fonction de Zamolodchikov qui était décroissante par renormalisation et qui, aux points fixes, était égale à la charge centrale. Un cas particulier, n'existant pas pour le modèle de Potts, serait un point stable dans l'I.R. d'un côté et dans l'U.V. de l'autre, auquel cas ce point fixe ne serait pas un extremum de c_{eff} . De la même manière, les x_{eff} sont égaux aux dimensions d'échelle des champs conformes aux points fixes. c_{eff} et les x_{eff} permettent donc de localiser et de déterminer les caractéristiques des points fixes.

Cette méthode de détermination des points fixes est d'autant plus précise que l'espace sur lequel chercher est petit. C'est pourquoi dans le chapitre 1, on a utilisé l'autodualité afin de réduire cet espace. Revenons au cas de deux modèles couplés sur réseau triangulaire, sans interaction à trois spins. Dans ce cas, on a un espace autodual de dimension 1. Pour localiser les points fixes, nous avons écrit une matrice de transfert dans la représentation en boucles (en procédant de façon légèrement différente de précédemment), et déterminé la charge centrale effective le long de cet espace. Les détails de la méthode et des résultats, donnés dans [5], seront exposés dans la section 2.3.

En fait, la méthode peut présenter des difficultés, car des CL périodiques sur réseau discret peuvent correspondre à des CL twistées dans la limite continue ! C'est par exemple le cas pour un réseau triangulaire au point fixe antiferromagnétique, à cause de la frustration. Lorsque L est pair, les CL sont bien périodiques dans la limite continue, mais lorsque L est impair, dans la limite continue il y a une ligne de frustration, comme on peut le comprendre intuitivement, des spins voisins voulant être dans des états différents. Si on veut donc avoir accès à la charge centrale c , il faut donc considérer uniquement des largeurs L paires, tandis que considérer des largeurs impaires donne une charge centrale effective valant $c - 12x_d$ d'après l'Eq. (2.89), et donc permet d'avoir accès à la dimension x_d de l'opérateur de désordre. Notons aussi que selon les représentations, on n'obtient pas forcément les mêmes opérateurs. Cela est dû au fait que les amas ne sont pas des objets locaux par rapport aux spins et réciproquement. Ainsi, certains opérateurs vont exister dans les deux représentations, tandis que d'autres non (les opérateurs correspondant à une amplitude nulle dans la représentation en spins). Par exemple, T contient l'opérateur de spin dans la représentation en spins, mais pas dans la représentation en amas : cet opérateur n'intervient pas lorsque les CL longitudinales sont libres. Par contre, dans le chapitre suivant, nous allons généraliser la représentation en amas à des CL longitudinales périodiques, et nous verrons que la matrice de transfert est alors plus grande, et contient l'opérateur de spin.

Le cas de CL transverses fixées ou libres est analogue, excepté qu'il n'y a plus qu'un secteur holomorphe, comme expliqué précédemment, et de ce fait des facteurs sont modifiés. De plus, il y a des termes de bord non universels de la forme $\frac{q_k}{L}$. Ainsi, c_{eff} et les dimensions holomorphes

effectives h_{eff} sont définies par [66] :

$$f_k(L) = \frac{g_k(L)}{L} - \frac{\pi c_{\text{eff}}(L)}{24L^2} + \frac{\pi h_{\text{eff}}(L)}{L^2} . \quad (2.92)$$

En procédant comme pour les CL périodiques, on détermine les c_{eff} et h_{eff} , et on identifie la théorie avec une théorie conforme avec des CL α et β données. Là encore, les CL dans la limite continue ne sont pas forcément triviales, d'autant plus que les CL discrètes ne sont pas les mêmes selon la représentation choisie. Par exemple, des CL libres dans la représentation en spins correspondent à des CL fixées dans la représentation en boucles.

2.3 Etude numérique de deux modèles de Potts couplés

Dans notre article [5], nous avons, en plus de déterminer des équations d'autodualité, étudié numériquement, à l'aide d'une matrice de transfert, le cas de deux modèles de Potts couplés sur réseau triangulaire sans interaction à trois spins. En effet, on s'attend à ce que le modèle soit critique le long de la surface autoduale, et donc il est intéressant de calculer la charge centrale effective afin de déterminer les classes d'universalité correspondantes.

2.3.1 Matrice de transfert

Nous avons écrit une matrice de transfert dans la représentation en boucles du modèle, voir la sous-section 2.2.4. En effet, le modèle de Potts sur réseau triangulaire peut être transformé en un modèle de boucles sur le réseau médial, en l'occurrence ici un réseau de Kagomé [4],[91]. Les différents réseaux sont représentés dans la Fig (2.2). Pour une circonférence de L triangles, chaque couche de temps coupe $2L$ bouts du modèle de boucles défini sur le réseau de Kagomé. Afin que la valeur propre dominante de la matrice de transfert corresponde bien au fondamental dans la limite continue (ce qui n'est pas forcément le cas, voir la discussion à la fin de la sous-section 2.2.5), il est nécessaire de respecter la symétrie du réseau triangulaire : L doit être pair et deux couches de temps successives doivent être comme sur la Fig (2.2).

La diagonalisation est effectuée numériquement en décomposant la matrice de transfert T_L en produit de matrices élémentaires, ajoutant chacune un vertex du réseau de Kagomé (ou de manière équivalente un lien du réseau triangulaire). Toutes les matrices élémentaires sont ici identiques, excepté en ce qui concerne la position des deux brins sur lesquels elles agissent. Nous avons diagonalisé T_L pour des largeurs inférieures ou égales à $L = 10$.

2.3.2 Charge centrale

Nous avons vu à la fin de la sous-section 1.3.1 qu'en paramétrisant Q par $Q = 4 \cos^2(\pi g)$ (lorsque g varie entre 0 et $\frac{3}{2}$, Q parcourt $[0, 4]$ trois fois), les solutions autoduales ont l'expression suivante :

$$v_1 = z(1 - z), \quad v_{12} = (z - 1)^2, \quad z \equiv 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} g \right) . \quad (2.93)$$

Pour déterminer les valeurs de la charge centrale effective c , on a effectué des interpolations à trois largeurs de la forme :

$$f_0(L) = -\frac{\pi c}{6L^2} + \frac{A}{L^4} , \quad (2.94)$$

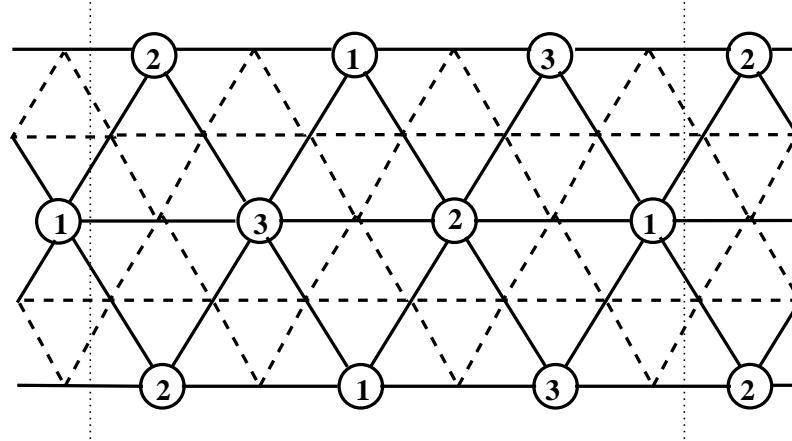


FIG. 2.2 – Ruban semi-infini ici de largeur $L = 2$ triangles dans la direction verticale. Les CL transverses sont périodiques et donc les haut et bas de la figure doivent être identifiés. Les spins sont situés aux niveaux des cercles et interagissent le long des lignes en trait plein, qui forment un réseau triangulaire. La numérotation à l'intérieur des cercles correspond à la décomposition en trois sous-réseaux du réseau triangulaire. Le modèle de boucles est défini sur le réseau médial, en l'occurrence un réseau de Kagomé, représenté en traits pointillés. La matrice de transfert propage le système le long de la direction horizontale, de gauche à droite. Les traits verticaux correspondent à deux couches de temps successives.

le terme non-universel $\frac{A}{L^4}$ étant supposé représenter les corrections d'ordre supérieur. Les valeurs obtenues pour $c(g)$ sont représentées dans la Fig. (2.3). On a effectué trois interpolations : on a utilisé des largeurs $L - 4$, $L - 2$, et L , L valant 6, 8 ou bien 10 selon l'interpolation.

On voit que le couplage K_{12} entre les deux modèles est non pertinent pour $\frac{1}{4} \leq g < \frac{3}{4}$ car les résultats numériques montrent que la charge centrale vaut simplement :

$$c(g) = 2 \left(1 - \frac{6(1-g)^2}{g} \right), \text{ pour } \frac{1}{4} \leq g < \frac{3}{4}, \quad (2.95)$$

ce qui correspond à deux fois la charge centrale d'un seul modèle de Potts au point ferromagnétique [17] (voir la sous-section 3.3.2 pour les rappels sur la valeur de la charge centrale aux points critiques du modèle de Potts, on rappelle que g vaut $\frac{\pi}{p}$). La limite continue, pour $\frac{1}{4} \leq g < \frac{3}{4}$, est donc celle de deux modèles découplés et ferromagnétiques. Ce résultat correspond à ce qu'aurait donné une analyse perturbative naïve, le couplage K_{12} devenant marginal pour $g = \frac{3}{4}$ (ce qui correspond à $Q = 2$, i.e. au modèle d'Ising).

La zone $0 \leq g \leq g_1$ avec $g_1 \approx 0.15$ correspond à une charge centrale supérieure à 2. En particulier, pour $g = 0$ (i.e. $Q = 4$), les résultats numériques laissent penser que $c(g = 0) = 3$. L'interprétation dans la limite continue n'est donc pas évidente, le couplage entre les modèles étant pertinent. Pour $1 < g < g_2$, avec $g_2 \approx 1.10$, notre diagonalisation numérique n'a pas fonctionné, peut-être parce que la valeur propre dominante était imaginaire. Pour $g_2 < g < \frac{3}{2}$, le couplage a aussi un effet non trivial, la charge centrale n'étant pas simplement le double de la charge centrale d'un seul modèle au point fixe de Berker-Kadanoff (point critique pour un seul modèle correspondant à ce domaine de g , voir la sous-section 3.3.2).

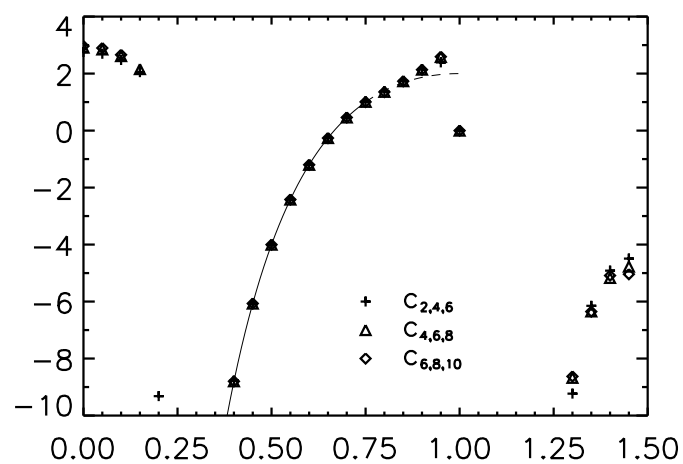


FIG. 2.3 – Charge centrale en fonction de g . La courbe en train plein montre le résultat exact valable pour $\frac{1}{4} \leq g \leq \frac{3}{4}$.

Chapitre 3

Modèle de Potts pour Q générique

Nous allons développer la fonction de partition du modèle de Potts à l'aide de quantités notées $K_{1,2l+1}$, qui sont des généralisations de caractères au cas d'un réseau discret et pour n'importe quelle température. Pour cela, nous choisissons des conditions aux limites avantageuses : des CL cycliques, c'est-à-dire périodiques selon la longueur N et libres selon la largeur L . La fonction de partition Z se décompose alors comme :

$$Z = \sum_{l=0}^L c^{(l)} K_{1,2l+1} , \quad (3.1)$$

où les $c^{(l)}$ sont les coefficients du développement.

Il existe différentes manières d'établir ce développement. Pasquier et Saleur [16] l'ont obtenu en utilisant le groupe quantique $U_q(sl(2))$. l s'interprète alors comme un spin, et les $c^{(l)}$ sont des nombres q -déformés. Chang et Shrock [44],[43] ont réobtenu le développement dans la représentation en spins. Dans notre article [51], nous présentons une nouvelle méthode, purement combinatoire, qui utilise la représentation en amas. Nous retrouvons les coefficients $c^{(l)}$ puissance de Q par puissance de Q , et nous montrons bien que les définitions des $K_{1,2l+1}$ sont équivalentes entre les trois méthodes. Cette nouvelle méthode a l'avantage de pouvoir s'appliquer à d'autres types de conditions aux limites, par exemple des conditions cycliques/fixées, i.e. périodiques selon la longueur et fixées selon la largeur. De plus, en la généralisant, nous pourrions considérer des conditions aux limites toroïdales, comme nous le verrons dans le chapitre 6. La méthode est exposée dans la sous-section 3.1.1. Nous exposons dans la sous-section 3.1.2 les autres méthodes qui existaient déjà, et nous prouvons que les résultats obtenus avec ces différentes méthodes sont bien équivalents.

Le développement de Z obtenu permet de caractériser le diagramme de phase du modèle, i.e. de donner le contenu en opérateurs aux points fixes, lorsque le nombre d'états Q est générique. Par Q générique, nous entendons que Q doit être différent des nombres de Beraha. Ces nombres, introduits par Beraha comme limites de zéros de polynômes chromatiques [61], sont de la forme :

$$B_p = \left(2 \cos \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)^2 \quad (3.2)$$

avec p entier. En particulier, B_4 vaut 2 et correspond au modèle d'Ising, et B_6 vaut 3 et correspond au modèle de Potts à trois états. En effet, lorsque Q vaut un B_p , nous verrons chapitre

5 qu'il y a des annulations entre différents $K_{1,2l+1}$, ce qui limite l'intérêt des décompositions faites dans ce chapitre. Afin d'être sûr qu'il n'y a pas d'annulation entre $K_{1,2l+1}$, nous supposons en fait que le nombre p défini par $\sqrt{Q} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$ est irrationnel.¹ Saleur a en particulier mis en évidence l'existence d'une phase de Berker-Kadanoff dans la région antiferromagnétique [17]. Une telle phase est caractérisée par des corrélations algébriques, i.e. par une longueur de corrélation infinie [58]. Cela s'explique par la présence d'un point fixe attractif en température, appelé point fixe de Berker-Kadanoff. Les résultats existant sur le diagramme de phase du modèle de Potts avec Q générique sont exposés dans la section 3.2.

3.1 Modèle de Potts avec CL cycliques

3.1.1 Structure de la matrice de transfert

Nous considérons un modèle de Potts avec un nombre d'états générique. Les CL sont cycliques, i.e. périodiques selon l'horizontale (la direction de propagation) et libres selon la direction transverse. Q étant non entier, seule la représentation en amas (ou en boucles) est possible. Cependant, les CL longitudinales étant périodiques et non libres, la matrice de transfert exposée au chapitre 2 ne convient pas, car elle est de dimension trop petite. Jacobsen et Salas ont expliqué dans [56] comment écrire une matrice de transfert pour des CL cycliques. Dans cette sous-section, nous exposons leur procédure.

L'espace sur lequel agit T est maintenant l'espace des connectivités entre la première couche $\{1', \dots, L'\}$ et la couche considérée à l'"instant" t , $0 \leq t \leq N$, (i.e. après t applications de T) $\{1, \dots, L\}$. En effet, comme on veut "recoller" la dernière couche avec la première, on est obligé de garder en mémoire les connectivités de la première couche. Nous serons dans la suite en particulier intéressés, pour une partition de $\{1', \dots, L', 1, \dots, L\}$ donnée, par les blocs contenant des éléments des deux couches, qui sont appelés ponts. Par exemple, pour une largeur de 4, la partition $\{\{1', 3'\}, \{2'\}, \{4', 4, 2\}, \{1\}, \{3\}\}$, notée plus simplement $\delta_{1',3'}\delta_{4',4,2}$, contient un pont, à savoir $\delta_{4',4,2}$. La définition des opérateurs de détachement D_i et de liaison $J_{i,i'}$ est inchangée par rapport au chapitre 2, ainsi que l'expression de T en fonction de ces opérateurs.

La fonction de partition est donnée par :

$$Z = \langle u | T^N | v_{\text{Id}} \rangle . \quad (3.3)$$

Le vecteur de départ $|v_{\text{Id}}\rangle$ correspond à la partition $\delta_{1,1'}\delta_{2,2'} \dots \delta_{L,L'}$, car au départ la couche est la première couche et il n'y a pas de liens entre les sites de la couche. T^N permet de construire le réseau, tandis que le vecteur u implémente les CL longitudinales. Ainsi, $|u\rangle$ agit sur un état $|v_P\rangle$ correspondant à la partition P de la manière suivante :

$$\langle u | v_P \rangle = Q^{|P'|} , \quad (3.4)$$

P' étant la partition obtenue à partir de P en identifiant les dernière et première couches :

$$|v_{P'}\rangle = \left(\prod_{i=1}^L J_{i,i'} \right) |v_P\rangle . \quad (3.5)$$

¹En effet, lorsque p est non entier mais fractionnaire, il y a aussi des annulations entre $K_{1,2l+1}$, mais qui n'ont pas d'incidence sur le diagramme de phase. Afin d'être sûr de ne pas avoir de problème, nous nous plaçons dans le cas où p est irrationnel.

$|u\rangle$ identifie donc les dernière et première couches et donne un facteur Q aux amas résultants. En effet, il est important de noter que T donne bien un poids Q aux amas ne touchant pas la première couche, mais donne un poids 1 aux amas qui la touchent. C'est le vecteur $|u\rangle$ qui leur donne le bon poids.

T a une structure remarquable. Sa dimension totale est égale au nombre de Catalan C_{2L} , mais elle est décomposable en blocs de dimensions plus petites. Cela est dû aux deux observations suivantes :

1. la connectivité à l'intérieur de la première couche n'est pas modifiée par l'application de T , T propageant la couche de droite.
2. le nombre l de ponts ne peut que décroître.

Ainsi, T a une forme triangulaire par blocs :

$$T = \begin{pmatrix} T_{L,L} & 0 & \dots & 0 \\ T_{L-1,L} & T_{L-1,L-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{0,L} & T_{0,L-1} & \dots & T_{0,0} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où l'on a ordonné les blocs $T_{l,l'}$ par nombre de ponts décroissant. De plus, chaque bloc $T_{l,l}$ situé sur la diagonale de T , et correspondant à un nombre de ponts conservé, est lui-même diagonal par blocs :

$$T_{l,l} = \begin{pmatrix} T_{l,l}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{l,l}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{l,l}^{(N_l)} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

chaque sous-bloc $T_{l,l}^{(j)}$ étant caractérisé par une connectivité au sein de la première couche et une position des l ponts donnés. Nous avons appelé N_l le nombre de sous-blocs au sein du bloc $T_{l,l}$. Les N_l sous-blocs sont en fait identiques, car les règles pour les calculer coïncident : la matrice de transfert est insensible à la connectivité au sein de la première couche et à la provenance des l ponts, au final seul le nombre l de ponts est important. Les $T_{l,l}^{(j)}$ ont donc en particulier même dimension $n(L, l)$, égale au nombre de connectivités de la couche de droite compatibles avec l ponts, et bien sûr avec la planarité. $n(L, l)$ est donné par :

$$n(L, l) = \frac{2l+1}{L+l+1} \binom{2L}{L-l} = \binom{2L}{L-l} - \binom{2L}{L-l-1}. \quad (3.8)$$

De plus, à cause de la symétrie entre première et dernière couches, N_l , nombre de connectivités de la première couche avec l ponts, est égal à $n(L, l)$.

T est donc beaucoup plus grande que la matrice de transfert habituelle, i.e. avec des CL longitudinales libres, dans la représentation en amas. En effet, les sous-blocs $T_{0,0}^{(j)}$, correspondant à l'absence de ponts, sont tous égaux à cette dernière. En particulier, $n(L, 0)$ n'est autre que le nombre de Catalan C_L , voir l'Eq. (2.78). Cela est dû au fait que les règles de calcul de $T_{0,0}^{(j)}$ et de la matrice de transfert habituelle sont identiques. Une autre interprétation est qu'avec la matrice de transfert introduite, on peut traiter aussi le cas des CL fixées :

$$Z = \langle u' | VT^N | v_{\text{Id}} \rangle, \quad (3.9)$$

où le vecteur de départ est toujours $|v_{\text{Id}}\rangle$, VT^N permet de construire le réseau, et où $|u'\rangle$ est le nouvel état final, défini de façon analogue à l'Eq. (2.75) mais en tenant compte des deux couches. Cependant, on comprend mal avec l'Eq. (3.9) pourquoi uniquement le secteur à 0 pont contribuerait pour des CL libres. Pour cela, il faut voir les choses de manière légèrement différente. On part non pas du "temps" $t = 0$, mais d'un temps infinitésimal négatif $t = -\epsilon$: le vecteur de départ est alors $|v'_{\text{Id}}\rangle$, correspondant à une partition des deux couches constituée que de points isolés. L'état final est maintenant de nouveau u , défini Eq. (3.4), afin d'identifier les couches aux instants $t = N$ et $t = -\epsilon$. On a donc une autre expression de Z pour des CL libres :

$$Z = \langle u | VT^N | v'_{\text{Id}} \rangle . \quad (3.10)$$

Sous cette forme, on comprend pourquoi seul le secteur à 0 pont contribue pour des CL libres, l'état de départ $|v'_{\text{Id}}\rangle$ ne contenant pas de pont (on rappelle que le nombre de ponts ne peut que diminuer).

On pourrait être tenté de symétriser la matrice de transfert lorsque le réseau a des symétries particulières, par exemple la symétrie par réflexion pour un réseau carré. En effet, dans le cas de CL libres, cela permettrait de diminuer la dimension de la matrice de transfert, i.e. d'expliquer pourquoi certaines valeurs propres (en l'occurrence les valeurs propres correspondant à des états non symétriques) ne contribueraient pas. Dans le cas des CL cycliques, ce n'est pas le cas à cause du fait qu'il y ait plusieurs sous-blocs identiques, mais correspondant à des symétries différentes. Ainsi, en symétrisant par réflexion, on obtient deux types de sous-blocs, ceux ayant une connectivité de la première couche et une position des l ponts symétriques et ceux dont ce n'est pas le cas. La symétrisation couple les sous-blocs non symétriques entre eux et les états au sein des sous-blocs symétriques. Par conséquent, les sous-blocs non symétriques ont une dimension plus grande que les sous-blocs symétriques. La symétrisation, même si elle diminue le nombre de sous-blocs non-symétriques et la dimension des sous-blocs symétriques, n'est donc pas avantageuse, car elle complique la structure de T . C'est pourquoi nous ne l'effectuons pas. Notons aussi que lorsque $v = -1$, on peut réduire la dimension de T en interdisant les connectivités entre voisins, V étant un projecteur, comme expliqué dans la sous-section 2.2.3.

Du fait de l'identité des sous-blocs pour un nombre de ponts l donné, on peut choisir uniquement un sous-bloc de référence, lorsqu'on s'intéresse uniquement aux valeurs propres de la matrice de transfert. Nous choisissons le sous-bloc correspondant à une connectivité de la première couche triviale (que des singletons) et où les l ponts commencent à $1', 2', \dots, l'$. On note ce sous-bloc simplement T_l . De plus, comme montré Fig. (3.1), on peut ne plus numéroter la couche de gauche, et simplement marquer par un point noir les partitions de la couche de droite correspondant à un pont. Nous allons maintenant voir comment déterminer les amplitudes de ces valeurs propres, et ce de trois façons équivalentes !

3.1.2 Décomposition de Z en $K_{1,2l+1}$

Il n'est pas évident de connaître les amplitudes des valeurs propres en utilisant l'Eq. (3.3). En fait, nous allons voir que les amplitudes, pour Q donné, dépendent uniquement du nombre de ponts l , mais ni de la largeur L , ni de la valeur propre choisie au sein de T_l , et ni de la température v , comme cela aurait dû être à priori le cas. Par conséquent, nous allons développer Z sous la forme suivante :

$$Z = \sum_{l=0}^L c^{(l)} K_{1,2l+1} , \quad (3.11)$$

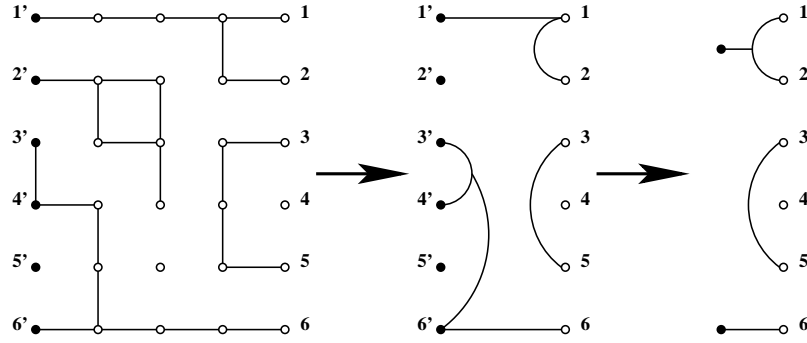


FIG. 3.1 – Exemple de configuration d'amas sur réseau carré et de l'état de connectivité correspondant, faisant intervenir les couches de gauche (représentée par des points noirs) et de droite (représentée par des points blancs). La partition correspondante est $P = (1'12)(2')(3'4'6'6)(5')(35)(4)$, qui contient donc deux ponts. Les éléments de la matrice de transfert étant indépendants de la connectivité de la couche de gauche, on peut ne représenter que la couche de droite en assignant simplement à chaque pont un point noir non numéroté.

les $c^{(l)}$ correspondant aux amplitudes que nous allons déterminer, et les $K_{1,2l+1}$ étant définis comme :

$$K_{1,2l+1}(L, v) = \sum_{i=1}^{n(L,l)} [\lambda_{l,i}(L, v)]^N, \quad (3.12)$$

les $\lambda_{l,i}(L, v)$ étant les $n(L, l)$ valeurs propres dans le secteur à l ponts. $K_{1,2l+1}$ est donc simplement égal à $\text{Tr}(T_l)^N$. Les $K_{1,2l+1}$ constituent donc les "éléments de base" de la fonction de partition, et nous expliquerons dans la section 3.3 leur notation, lorsque nous étudierons leur limite continue aux points fixes.

Nous allons maintenant donner une nouvelle méthode, que nous avons publiée dans [51], pour déterminer les $c^{(l)}$. Cette méthode, comme elle ne fait appel qu'à des raisonnements combinatoires, a l'avantage de pouvoir se généraliser au cas de CL toroïdales, comme nous le verrons chapitre 6. De plus, elle est directement reliée à la façon dont nous avons écrit la matrice de transfert. Nous exposerons dans la section 3.2 les deux autres démonstrations qui existaient déjà, et nous montrerons qu'elles sont bien équivalentes à la notre.

Du fait des CL cycliques, les configurations d'amas possibles sont caractérisées par leur nombre d'amas non-triviaux (NTC), i.e. par les amas percolant selon la direction horizontale. On note j le nombre de NTC d'une configuration donnée, et Z_{2j+1} la fonction de partition restreinte à j NTC, i.e. la fonction de partition obtenue en ne tenant compte que des configurations à j NTC. En particulier, on a :

$$Z = \sum_{j=0}^L Z_{2j+1}. \quad (3.13)$$

Nous allons décomposer les $K_{1,2l+1}$ en Z_{2j+1} , puis inverser ces relations de manière à avoir les décompositions des Z_{2j+1} en $K_{1,2l+1}$, et enfin utiliser l'Eq. (3.13) afin d'obtenir celle de Z [51]. Comme $K_{1,2l+1} = \text{Tr}[T_l^N]$, on peut écrire :

$$K_{1,2l+1} = \sum_{i=1}^{n(L,l)} \langle v_{l,i} | T^N | v_{l,i} \rangle, \quad (3.14)$$

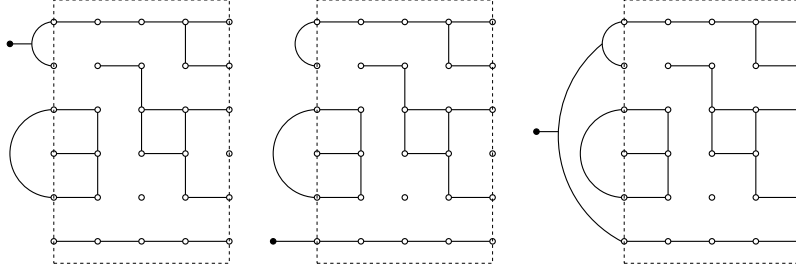


FIG. 3.2 – Configuration d'amas sur réseau carré et les trois états de connectivité compatibles, montrés à gauche de la configuration.

où les $|v_{l,i}\rangle$ sont les $n(L, l)$ connectivités possibles avec l ponts (sans tenir compte de la connectivité de la couche de gauche), i.e. les $n(L, l)$ connectivités possibles des L points blancs avec l points noirs. Nous allons montrer qu'une configuration d'amas donnée à j NTC est contenue $n(j, l)$ fois dans $K_{1, 2l+1}$. Pour cela, nous disons que $|v_{l,i}\rangle$ est compatible avec une configuration d'amas si l'action de cette configuration sur $|v_{l,i}\rangle$ (définie de manière analogue à l'action de T , après l'action de la configuration on a avancé d'un temps égal à N) donne la même configuration $|v_{l,i}\rangle$. Un exemple est donné dans la Fig. (3.2). Considérons une configuration d'amas à j NTC, le k -ème NTC reliant les points $\{y_k\}$ de la dernière colonne (on "oublie" que les CL longitudinales sont périodiques et donc on considère les première et dernière colonnes comme distinctes). Ainsi, sur la Fig. (3.2), pour la configuration à deux NTC choisie, on a $\{y_1\} = 1, 2$ et $\{y_2\} = 6$. Les états $|v_{l,i}\rangle$ compatibles avec une configuration d'amas caractérisée par des $\{y_k\}$ sont tels que :

1. Les connectivités des points $y \notin \cup_{k=1}^j \{y_k\}$ sont les mêmes que dans la configuration d'amas. Par exemple, Fig. (3.2), les points $y = 3, 5$ doivent être connectés.
2. Les points $\{y_k\}$ correspondant à un même NTC (par exemple $y = 1, 2$ dans la Fig. (3.2)) doivent être connectés.
3. On peut relier ou non les ensembles $\{y_k\}$ entre eux, et leur attribuer ou non des points noirs (l étant égal au nombre de points noirs attribués).

Les deux premières règles ne laissent pas de choix, tandis que la troisième implique qu'il y a $n(j, l)$ états $|v_{l,i}\rangle$ compatibles. On en déduit en particulier que le nombre de ponts l des états compatibles doit être plus petit que le nombre de NTC j de la configuration d'amas considérée. Nous avons donc bien obtenu le résultat annoncé. Comme $K_{1, 2l+1}$ est simplement donné par une trace, les j NTC ont un poids égal à 1, tandis que dans Z_{2j+1} ils ont le poids habituel, à savoir Q . On obtient donc le développement suivant pour $K_{1, 2l+1}$:

$$K_{1, 2l+1} = \sum_{j=l}^L n(j, l) \frac{Z_{2j+1}}{Q^j}. \quad (3.15)$$

Notons que la somme sur j commence à l , puisque seules les configurations d'amas avec $j \geq l$ sont contenues dans $K_{1, 2l+1}$, et se termine à L , puisque le nombre de NTC des configurations ne peut dépasser la largeur L du réseau.

En inversant les Eq. (3.15), on obtient le développement des Z_{2j+1} en $K_{1, 2l+1}$:

$$Z_{2j+1} = \sum_{l=j}^L c_j^{(l)} K_{1, 2l+1}, \quad (3.16)$$

les coefficients du développement $c_j^{(l)}$ étant donnés par :

$$c_j^{(l)} = (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q^j . \quad (3.17)$$

Il faut bien noter que comme seuls les $j \geq l$ contribuent dans le développement des $K_{1,2l+1}$, par inversion seuls les $l \geq j$ contribuent dans le développement des Z_{2j+1} . Ce résultat était prévisible car le nombre de ponts ne peut que décroître par application de T , donc une configuration à j NTC, bien que correspondant à l'instant final N à j ponts, peut à des instants plus petits correspondre à des états à plus de ponts (par exemple à $t = 0$, l'état de départ comme expliqué précédemment est $|v_{\text{Id}}\rangle$, état à L ponts). Un cas particulier intéressant est le cas $j = 0$, correspondant à interdire les NTC. On obtient alors une somme alternée sur les $K_{1,2l+1}$:

$$Z_1 = \sum_{l=0}^L (-1)^l K_{1,2l+1} . \quad (3.18)$$

En combinant les Eq. (3.13) et (3.16), on obtient le développement de Z :

$$Z = \sum_{l=0}^L c^{(l)} K_{1,2l+1} \quad (3.19)$$

les $c^{(l)}$ valant $\sum_{j=0}^l c_j^{(l)}$ ce qui peut se mettre sous la forme d'un nombre q -déformé :

$$c^{(l)} = (2l+1)_q , \quad (3.20)$$

où par définition un nombre n q -déformé est :

$$(n)_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad (3.21)$$

et où q a été défini chapitre 1 par $\sqrt{Q} = q + q^{-1}$. En particulier, pour $q = 1$, i.e. $Q = 4$, $(n)_1$ vaut simplement n . La raison pour laquelle des nombres q -déformés interviennent sera claire dans la sous-section 3.2.2 lorsque nous donnerons une démonstration algébrique de l'Eq. (3.19). Il est intéressant de noter que se restreindre à j NTC correspond à garder uniquement le terme en Q^j des $c^{(l)}$, à savoir $c_j^{(l)}$. Comme les $c^{(l)}$ sont des polynômes de degré l en Q , seuls les $K_{1,2l+1}$ avec $l \geq j$ contribuent au développement de Z_{2j+1} .

3.1.3 Généralisation : CL fixées

Le fait d'avoir compris que le terme en Q^j des $c^{(l)}$ correspondait à j NTC nous permet de généraliser le développement de l'Eq. (3.16) à d'autres cas, comme expliqué dans notre article [51]. En particulier, on aimerait bien avoir une décomposition de Z pour des CL cycliques/fixées, i.e. lorsque les CL longitudinales sont toujours périodiques mais les CL transverses sont maintenant fixées. Nous allons d'abord considérer un cas de figure légèrement différent. On considère Z_D la fonction de partition du modèle défini sur le réseau dual au réseau direct, avec des CL fixées sur les deux spins externes, comme représenté dans la Fig. (3.3), les deux spins étant supposés *dans le même état*. Du point de vue du développement de Fortuin-Kasteleyn,

cela revient à donner un poids égal à 1 aux amas duaux touchant un (ou les deux) spin externe. Par souci de généralité, on définit $Z_{D,Q_0}(v_D)$, la fonction de partition pour un modèle de Potts défini sur le réseau dual à la température duale v_D , et telle que les amas touchant un spin externe aient un poids égal à Q_0 . Par dualité, le cas $Q_0 = Q$ est équivalent aux CL cycliques étudiées précédemment, tandis que $Q_0 = 1$ correspond à des CL fixées sur les spins externes.

On considère le développement de $\frac{Q^{2-S_D v^B}}{Q_0} Z_{D,Q_0}(v_D)$, le facteur global ayant été choisi de manière à avoir un résultat simple. Pour cela, nous allons convertir les poids des amas duaux en poids d'amas directs, une configuration directe étant en correspondance biunivoque avec une configuration duale, comme montré dans la Fig. (3.3). Nous adoptons la convention suivante : un amas dual est non trivial s'il percole selon l'horizontale ou bien s'il touche un (ou les deux) sites externes. Cette convention est naturelle, car on peut considérer que le réseau dual a une longueur nulle au niveau des deux sites externes. Avec cette convention, une configuration duale avec $j+1$ NTC duaux est associée à une configuration directe avec j NTC directs. Notons qu'il y a toujours au moins un NTC dual, j étant compris entre 0 et L . Considérons une configuration duale avec $j+1$ NTC duaux. On note t et t_D le nombre d'amas triviaux respectivement directs et duaux, et b et b_D le nombre de liens coloriés dans les configurations d'amas respectivement directe et duale. Son poids dans $\frac{Q^{2-S_D v^B}}{Q_0} Z_{D,Q_0}(v_D)$ vaut $\frac{Q^{2-S_D v^B}}{Q_0} Q_0^2 Q^{j-1} Q^{t_D} v_D^{b_D}$ si $j \geq 1$: les t_D amas duaux triviaux et les $j-1$ NTC duaux ne touchant pas les sites externes ont chacun un poids Q , tandis que les 2 NTC duaux touchant les sites externes ont un poids Q_0 . Si $j = 0$, le poids est $\frac{Q^{2-S_D v^B}}{Q_0} Q_0 Q^{t_D} v_D^{b_D}$, car alors il y a un seul NTC dual touchant les deux sites externes. Pour exprimer ces poids en fonction des quantités directes, on utilise la relation de dualité habituelle $Q^{1-S_D v^B} Z_D(v_D) = Z(v)$ (qui est bien valable, le réseau étant planaire), avec $v = \frac{Q}{v_D}$. Traduite en termes de poids de configurations, cette relation implique que :

$$Q^{1-S_D v^B} Q^{j+1} Q^{t_D} v_D^{b_D} = Q^j Q^t v^b . \quad (3.22)$$

En utilisant cette équation, on en déduit que le poids d'une configuration d'amas avec j NTC directs dans $\frac{Q^{2-S_D v^B}}{Q_0} Z_{D,Q_0}(v_D)$ est $Q_0 Q^{j-1} Q^t v^b$ si $j \geq 1$, et $Q^t v^b$ si $j = 0$. Par conséquent, ce poids est identique au poids de la configuration dans $Z(v)$, excepté que pour $j \geq 1$ NTC directs l'un d'eux a un poids Q_0 au lieu de Q . On peut reprendre l'Eq. (3.19), mais en remplaçant Q^j par $Q_0 Q^{j-1}$ pour $j \geq 1$ et en ne changeant rien pour $j = 0$:

$$\boxed{\frac{Q^{2-S_D v^B}}{Q_0} Z_{D,Q_0}(v_D) = \sum_{l=0}^L b^{(l)} K_{1,2l+1}(v)} , \quad (3.23)$$

avec les amplitudes $b^{(l)}$ données par :

$$b^{(l)} = (-1)^l + \sum_{j=1}^l (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q_0 Q^{j-1} = \frac{Q_0}{Q} c^{(l)} + (-1)^l \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) . \quad (3.24)$$

Notons bien que les $K_{1,2l+1}$ sont définis comme précédemment, et sont évalués en v , tandis que Z_{D,Q_0} est évaluée en v_D . Lorsque $Q_0 = Q$, $b^{(l)}$ et $c^{(l)}$ coïncident comme prévu. Comme dans le cas des CL cycliques, chaque puissance de Q dans l'Eq. (3.23) peut être interprétée comme une fonction de partition restreinte à un nombre fixé de NTC.

Considérons maintenant l'Eq. (3.23) pour des valeurs particulières de Q_0 . Dans le cas où

$Q_0 \rightarrow 0$, $b^{(l)} = (-1)^l$ et on a donc, en utilisant l'Eq. (3.18) :

$$\lim_{Q_0 \rightarrow 0} \left(\frac{Q^{2-S_D} v^B}{Q_0} Z_{D,Q_0}(v_D) \right) = \sum_{l=0}^L (-1)^l K_{1,2l+1}(v) = Z_1(v). \quad (3.25)$$

On obtient donc la fonction de partition restreinte à 0 NTC direct. Ce résultat était attendu, car dans la limite $Q_0 \rightarrow 0$, les configurations d'amas duaux qui dominent sont celles avec un seul NTC touchant les deux sites externes. Par dualité, cela correspond à des configurations d'amas directs sans NTC, i.e. avec $j = 0$, puisque comme les amas directs et duaux ne peuvent se couper, les amas directs ne peuvent percoler, un amas dual traversant le réseau en largeur. Au contraire, pour $Q_0 \rightarrow \infty$, $b^{(1)}$ est négligeable par rapport aux autres $b^{(l)}$ (il ne tend pas vers l'infini). En effet, dans cette limite, les configurations duales avec un seul NTC reliant les deux sites externes sont négligeables, et donc par dualité il y a au moins un NTC direct : $j = 0$ est interdit, et comme $l \geq j$, $l = 0$ l'est également.

Le cas où $Q_0 = 1$ correspond aux CL fixées sur le réseau dual, les spins étant fixés dans le même état des deux côtés. On note que comme $b^{(1)} = Q_0 - 1$, $b^{(1)}$ s'annule. Ainsi, pour des CL fixées, certaines valeurs propres ont une amplitude nulle. Nous en verrons les implications dans le chapitre 5. De plus, pour un réseau carré, on peut écrire un développement de Z avec des CL fixées cycliques sur le réseau *direct*. En effet, pour un réseau carré, le réseau dual est aussi un réseau carré, excepté les deux sites externes, qui sont équivalents à deux lignes de spins supplémentaires et tous dans le même état. En tenant compte du facteur global $\exp(2NK)$ correspondant aux interactions entre spins au sein des deux lignes, le réseau dual est donc équivalent à un réseau carré de largeur $L + 1$ (voir Fig. (3.3)) et de longueur N , avec des CL cycliques fixées. La fonction de partition correspondante Z_{++} a donc le développement suivant :

$$Z_{++}(L, N, v) = \frac{\exp(2NK)}{Q^{2-S_D} v^B} \sum_{l=0}^L b^{(l)} K_{1,2l+1}(L-1, N, v_D). \quad (3.26)$$

Notons que Z_{++} et les $K_{1,2l+1}$ ne sont pas évaluées pour les mêmes largeurs et températures. On pourrait aussi considérer le développement de Z_{+-} , cas où les spins sont fixés dans des états différents des deux côtés, en reprenant le raisonnement précédent mais en interdisant les amas duaux contenant les deux spins externes.

3.2 Autres interprétations des $K_{1,2l+1}$

3.2.1 Représentation en spins

La méthode que nous allons présenter a été développée par Chang et Shrock [44],[43]. Elle consiste à se placer à Q entier, de manière à pouvoir utiliser la représentation en spins, et suffisamment grand (cela simplifiera les dénombrements). Elle généralise ce que nous avons vu dans le chapitre 2, à savoir que pour des CL libres on peut retrouver la matrice de transfert de la représentation en amas à partir de la matrice de transfert de la représentation en spins en choisissant une base adaptée. On travaille donc dans la représentation en spins, avec une matrice de transfert T agissant sur cet espace. La fonction de partition est alors donnée simplement par $Z = \text{Tr}[T^N]$. On décompose l'espace des spins, de dimension Q^L , en sous-espaces caractérisés par un entier l appelé niveau. Le niveau est l'analogie du nombre de ponts dans la représentation

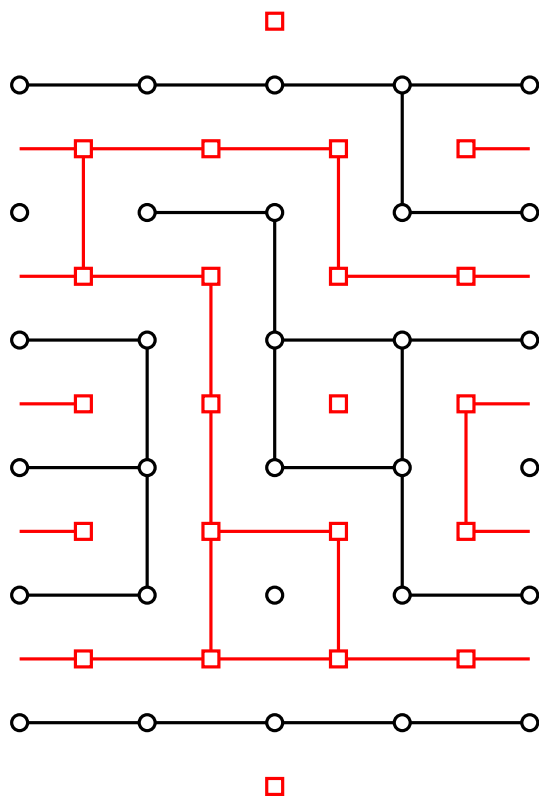


FIG. 3.3 – Le réseau direct est indiqué par des cercles, et le réseau dual par des carrés. On a choisi une configuration d'amas direct et représenté la configuration d'amas duale. Il y a deux NTC direct, et trois NTC duaux.

en amas, c'est pourquoi nous gardons la même notation. $c^{(l)}$ sera le nombre de sous-espaces indépendants au niveau l .

Considérons d'abord le niveau $l = 0$. Comme expliqué dans la sous-section 3.1.1, ce niveau est le seul qui intervient lorsqu'on considère des CL longitudinales libres, et correspond aux connectivités habituelles (il n'y a pas de point noir). Ainsi, une base du sous-espace de niveau 0 est donnée par l'action de T sur le vecteur 1, vecteur dont toutes les composantes dans la base de spin valent 1, correspondant au vecteur initial pour des CL longitudinales libres. La base est ainsi constituée de 1, somme de tous les états de spins, et des $|v_P\rangle$ somme de tous les états de spins avec les spins dans les mêmes blocs de P dans le même état. Ces états sont les pendants des $|v_P\rangle$ dans la représentation en amas, et sont donc représentés de façon identique (en reliant les spins qui sont dans les mêmes blocs), et la matrice de transfert restreinte à cet espace vaut T_0 . La question est maintenant de savoir quels sont les analogues des $|v_{P_l}\rangle$, lorsque P_l est une partition contenant l points noirs. Pour cela, rappelons nous que la matrice de transfert dans la représentation en amas donnait un poids de 1 et non de Q aux amas reliés à un point noir. Du point de vue de la représentation en spins, cela signifie que les spins reliés à un point noir sont fixés dans un état donné. Ainsi, les états au niveau l sont les $|v_{P_l, a_1, \dots, a_l}\rangle$, égal à la somme des états de spins tels que les spins qui sont dans les mêmes blocs soient dans le même état, cet état devant être a_i pour le i -ème bloc relié à un point noir. Pour un choix des a_i donné, T restreint à cet espace vaut T_l . La situation est donc analogue au cas de la représentation en amas, excepté que l'interprétation physique des points noirs et le nombre de fois que T contient T_l sont différents.

Déterminons les coefficients $c^{(l)}$. Comme Z est donnée par une trace, $c^{(l)}$ est simplement égal au nombre de sous-espaces indépendants au niveau l . Un décompte naïf donnerait une valeur de $c^{(l)}$ égale à $Q(Q-1) \dots (Q-l+1)$ (on suppose $Q \geq L$), puisqu'il y a l états correspondant aux l points noirs à fixer, et que ces états doivent être différents, car deux points noirs correspondant au même état équivalent à un seul, relié aux deux blocs marqués. Cependant, ce n'est pas le bon résultat, puisqu'en sommant ces dimensions, pour $0 \leq l \leq L$, on obtient une dimension totale supérieure à Q^L . Cela est dû au fait que des sous-espaces de niveaux différents ne sont pas indépendants entre eux. Considérons par exemple le niveau $l = 1$. La somme de tous les $|v_{P_1, a_1}\rangle$ pour P_1 fixé et $1 \leq a_1 \leq L$ est égale à $|v_{P_0}\rangle$, où P_0 est la partition obtenue à partir de P_1 en gardant les mêmes blocs, mais en supprimant le point noir : sommer sur tous les états possibles revient à ne plus fixer d'état. Ainsi, $c^{(1)}$ vaut $Q - 1$ et non Q . En itérant le raisonnement et en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, on peut exprimer les $c^{(l)}$ sous forme diagrammatique, et montrer qu'ils sont bien donnés par l'Eq. (3.20).

3.2.2 Méthode algébrique

Les méthodes vues jusqu'à présent étaient purement combinatoires, et permettaient de construire les $c^{(l)}$ terme par terme (puissance de Q par puissance de Q pour la représentation en amas, et par inclusion-exclusion pour la représentation en spins). La méthode algébrique développée par Pasquier et Saleur [16] permet d'obtenir directement l'expression des $c^{(l)}$, et de comprendre pourquoi ce sont des nombres q -déformés. Elle consiste à utiliser un modèle à six vertex équivalent au modèle de Potts sur réseau carré. Cette équivalence a été obtenue pour la première fois par Temperley et Lieb [26], en raisonnant sur les opérateurs e_i constituant la matrice de transfert du modèle (voir la sous-section 2.2.4). Nous donnons ici une autre démonstration de cette équivalence, due à Baxter [4].

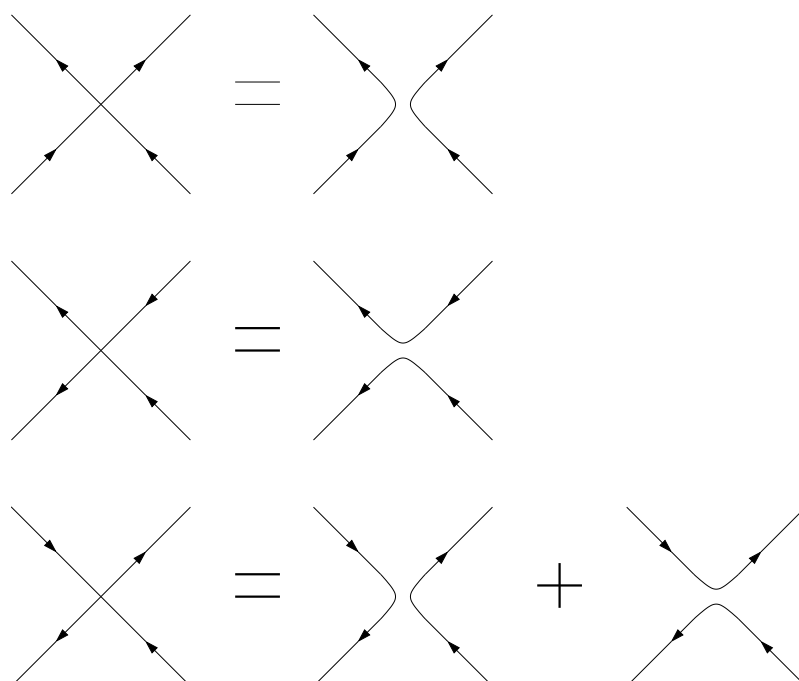


FIG. 3.4 – Représentation schématique du passage du modèle de boucles orientées au modèle à six vertex. Le poids d'une configuration du modèle à six vertex est égale à la somme des poids des configurations de boucles orientées compatibles avec cette configuration. On n'a représenté que trois configurations parmi les six, les trois autres configurations possibles étant obtenues simplement en inversant le sens des flèches.

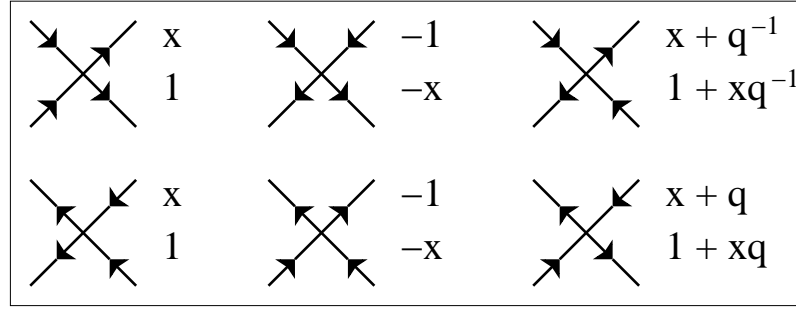


FIG. 3.5 – Poids des configurations de vertex. Le modèle est inhomogène pour $x \neq 1$: les poids supérieurs, resp. inférieurs, correspondent aux vertex situés sur les liens horizontaux, resp. verticaux.

Le réseau étant planaire, on peut utiliser le développement en boucles de la fonction de partition, donné dans la sous-section 1.2.3. Ce développement associe un poids \sqrt{Q} par boucle et un poids $x = \frac{v}{\sqrt{Q}}$ par lien colorié. Les facteurs de x sont donc locaux, tandis que les facteurs de \sqrt{Q} ne le sont pas. L'idée du modèle à six vertex est de rendre les facteurs \sqrt{Q} locaux en les décomposant. Ainsi, on oriente les boucles, à l'aide de flèches sur le réseau médial, et on leur attribue localement un facteur $q^{\frac{\alpha}{2\pi}}$ lorsqu'elles tournent d'un angle α . En ce qui concerne les boucles triviales (i.e. homotopes à un point), cette méthode permet bien d'attribuer localement un facteur \sqrt{Q} par boucle. En effet, une boucle orientée triviale a un poids q lorsqu'elle est orientée dans le sens trigonométrique, car elle tourne d'un angle total de 2π , tandis que son poids est q^{-1} lorsqu'elle est orientée dans l'autre sens, car elle tourne d'un angle total de -2π . Comme $\sqrt{Q} = q + q^{-1}$, après sommation sur les orientations possibles on retrouve bien un poids de \sqrt{Q} par boucle. Ce n'est pas le cas pour les boucles non triviales (i.e. percolant selon la direction périodique), car comme l'angle total correspondant est nul, elles ont un poids 2 au lieu de \sqrt{Q} . Nous verrons dans la suite comment y remédier. On passe de ce modèle de boucles orientées au modèle à six vertex en ne considérant plus que les flèches, i.e. en sommant sur les configurations de boucles compatibles avec une configuration de flèches donnée. Cette procédure est représentée dans la Fig. (3.4). On obtient alors un modèle de vertex sur réseau médial, avec six configurations possibles à chaque vertex. En effet, par construction le nombre de flèches entrantes au niveau d'un vertex doit être égal au nombre de flèches sortantes, ce qui ne laisse que six possibilités, représentées dans la Fig. (3.5) avec les poids associés. Le modèle est inhomogène, car les poids des configurations au niveau d'un vertex situé sur un lien horizontal du réseau ne sont pas les mêmes que ceux au niveau d'un vertex situé sur un lien vertical, pour une valeur quelconque de x . C'est uniquement pour $x = 1$ que le modèle est homogène. Pour les expressions des poids des configurations, on a utilisé le fait qu'on peut associer des facteurs supplémentaires inverses pour l'avant et l'arrière des flèches, sans changer la fonction de partition, ce qui leur confère un certain arbitraire [4].

Comme annoncé au chapitre 1, le modèle à six vertex permet de retrouver facilement la relation de dualité pour le réseau carré. En effet, on peut interchanger les poids des vertex situés sur des liens horizontaux avec ceux des vertex situés sur des liens verticaux, à condition de remplacer x par x^{-1} . Dans la limite d'un réseau infini, les CL n'important pas et les modèles de Potts et à six vertex étant équivalents puisque les amas typiques sont triviaux, on a :

$$Z(x) = x^{2E} Z(x^{-1}) . \quad (3.27)$$

Le point autodual $x = 1$ correspond à un modèle à six vertex homogène, les poids des vertex situés sur les liens horizontaux et verticaux coïncidant.

Le choix de poids fait dans la Fig. (3.5) permet d'écrire la matrice de transfert du modèle à six vertex sous la forme usuelle :

$$T_{6V} = Q^{\frac{L}{2}} \prod_{i=1}^L (x + e_{2i-1}) \prod_{i=1}^{L-1} (1 + x e_{2i}) . \quad (3.28)$$

T_{6V} , et donc les e_i , agissent sur les $2L$ flèches à un temps donné. Il est particulièrement fructueux de considérer ces $2L$ flèches comme une chaîne quantique de $2L$ spins $s = \frac{1}{2}$, où par convention un spin $s_z = \frac{1}{2}$ correspond à une flèche orientée vers la droite, et $s_z = -\frac{1}{2}$ à une flèche orientée vers la gauche. T_{6V} a donc une dimension égale à $\dim(T_{6V}) = 2^{2L} = 4^L$, les e_i étant donnés par :

$$e_i = 1 \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \cdots . \quad (3.29)$$

En utilisant l'Eq. (3.29), on voit que les e_i constituent bien une algèbre de Temperley-Lieb (TL), définie dans la sous-section 2.2.4. Nous avons donc encore obtenu une nouvelle représentation de cette algèbre ! La représentation en spins correspondait à des matrices de dimension Q^L , la représentation en amas avec CL libres à une dimension C_L , la représentation en amas avec CL cycliques à une dimension C_{2L} , tandis que la représentation à l'aide du modèle à six vertex correspond à une dimension 4^L . Les matrices de transfert dans ces différentes représentations ont la même structure algébrique : elles contiennent les représentations irréductibles (irreps) de l'algèbre de TL, mais pas avec les mêmes multiplicités, leurs dimensions étant différentes. En particulier, certaines irreps peuvent être présentes dans une représentation et absentes dans l'autre. L'avantage de la représentation par le modèle à six vertex est que cette représentation contient toutes les irreps de l'algèbre de TL pour des CL transverses libres, et qu'on peut sélectionner une irrep donnée avec des CL transverses bien choisies, comme Pasquier et Saleur l'ont montré [16]. Dans toute la fin de cette sous-section, nous exposons les résultats de leur article.

Pour étudier les irreps de l'algèbre de TL, on utilise le fait qu'elle constitue le commutant du groupe quantique $U_q(sl(2))$. $U_q(sl(2))$ est la déformation quantique de l'algèbre enveloppante habituelle $U(sl(2))$, la relation de commutation entre S_+ et S_- étant q -déformée, la définition d'un nombre q -déformé ayant été donnée dans l'Eq. (3.21). Ainsi, $U_q(sl(2))$ est l'algèbre engendrée par trois opérateurs S_z , S_+ et S_- ayant comme relations de commutation :

$$[S_z, S_{\pm}] = \pm S_{\pm} \quad (3.30)$$

$$[S_+, S_-] = (2S_z)_q . \quad (3.31)$$

Pour construire ces opérateurs agissant sur la chaîne quantique des $2L$ spins, on remarque que dans le cas d'un seul spin $\frac{1}{2}$, les relations de commutation classiques et quantiques coïncident. Par conséquent, les matrices de Pauli (normalisées par un facteur $\frac{1}{2}$) σ_z , σ_+ et σ_- habituelles conviennent. Dans le cas de $U(sl(2))$, pour construire les opérateurs de spin sur des espaces plus grands, on utilisait simplement le produit tensoriel. Ainsi, les opérateurs de spins agissant sur une chaîne quantique de 2 spins sont définis par :

$$S_z = \sigma_z \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_z \quad (3.32)$$

et des relations analogues pour S_+ et S_- , cette relation s'écrivant plus simplement sous la forme $S_z = \sigma_{z,1} + \sigma_{z,2}$, les indices correspondant à l'espace sur lequel l'action de l'opérateur est non triviale. Il s'agit donc d'une simple addition des opérateurs de spins. Ce n'est plus possible pour $U_q(sl(2))$, car les matrices construites par cette méthode ne vérifient pas les bonnes relations de commutation. On définit un coproduit Δ , qui généralise cette construction par :

$$\Delta(\sigma_z) = \sigma_z \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_z \quad (3.33)$$

$$\Delta(\sigma_{\pm}) = \sigma_z \otimes q^{-\sigma_z} + q^{\sigma_z} \otimes \sigma_z . \quad (3.34)$$

L'action de Δ sur σ_z est triviale, mais pas sur σ_{\pm} , de manière à ce que les relations de commutation soient vérifiées. En itérant $2L$ fois le processus, on obtient l'expression des opérateurs de spin agissant sur la chaîne quantique :

$$S_z = \sum_{i=1}^{2L} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \sigma_z \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \quad (3.35)$$

$$S_{\pm} = \sum_{i=1}^{2L} q^{\sigma_z} \otimes \dots \otimes q^{\sigma_z} \otimes \sigma_{\pm} \otimes q^{-\sigma_z} \otimes \dots \otimes q^{-\sigma_z} . \quad (3.36)$$

On voit en utilisant les expressions explicites de ces opérateurs de spin et des e_i , données Eq. (3.29), que les e_i commutent avec les opérateurs de spin : comme annoncé, l'algèbre de TL est le commutant de $U_q(sl(2))$, dans la représentation en vertex. La matrice de transfert T_{6V} , étant constituée de e_i , commute donc avec $U_q(sl(2))$. Notons que comme les relations de commutation de $U_q(sl(2))$, voir Eq. (3.30) et (3.31), sont invariantes par changement de q en q^{-1} , en remplaçant q par q^{-1} dans la définition du coproduit Δ , et donc dans S_{\pm} , on aurait obtenu des opérateurs satisfaisant aussi les bonnes relations de commutation, mais qui n'auraient pas commuté avec les e_i . Ainsi, il faut définir le coproduit en tenant compte des conventions choisies pour le poids des boucles orientées (q lorsque la boucle est orientée dans le sens trigonométrique) et pour la définition du spin ($s_z = \frac{1}{2}$ pour une flèche orientée vers la droite).

Considérons maintenant les irreps de $U_q(sl(2))$. Dans le cas où q n'est pas racine de l'unité, i.e. lorsque Q n'est pas un nombre de Beraha, les irreps ont une structure semblable à celle de $U(sl(2))$. Ainsi, une irrep donnée est indexée par un entier ou demi-entier l , et est constituée d'un espace engendré par $2l + 1$ vecteurs, indexés par m , $-l \leq m \leq l$, et notés $|l, m\rangle$ tels que :

$$S_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle \quad (3.37)$$

$$S_{\pm} |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)_q (l \pm m + 1)_q} |l, m \pm 1\rangle . \quad (3.38)$$

La q -dimension de l'irrep, définie comme la trace de q^{2S_z} sur cette dernière, vaut simplement :

$$\text{Tr}[q^{2S_z}] = (2l + 1)_q . \quad (3.39)$$

Pour connaître le nombre d'irreps l contenues dans l'espace total, de dimension 4^L , on raisonne là encore comme pour $U(sl(2))$. Il y a $\binom{2L}{L-m}$ vecteurs avec une valeur de m donnée. Le nombre d'irreps de type l est égal au nombre de vecteurs de plus haut poids $|l, l\rangle$ ($0 \leq l \leq L$), i.e. au nombre de vecteurs avec une valeur de m égale à l moins le nombre de vecteurs avec une valeur de m égale à $l + 1$, car les vecteurs avec $m = l$ qui ne sont pas des vecteurs de plus

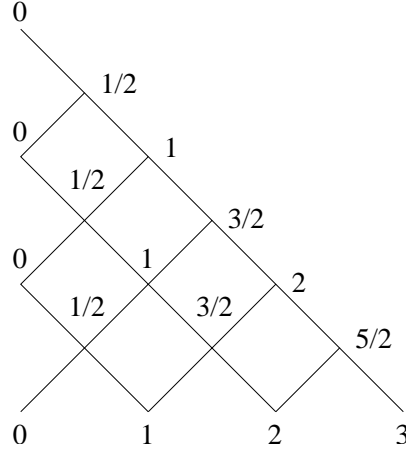


FIG. 3.6 – Diagramme de Bratteli pour $U_q(sl(2))$, lorsque q n'est pas racine de l'unité, et une largeur $L = 3$, i.e. $2L = 6$ spins. Le nombre d'irreps de spin l est égal au nombre de chemins partant du haut et arrivant sur l en bas. Par exemple, il y a une seule irrep correspondant à $l = 3$, tandis que l'irrep $l = 2$ a une multiplicité de 5.

haut poids sont obtenus par l'action de S_- sur les vecteurs ayant $m = l + 1$. Par conséquent, le nombre d'irreps l est :

$$n(L, l) = \binom{2L}{L-l} - \binom{2L}{L-l-1}. \quad (3.40)$$

On retrouve bien l'expression donnée Eq. (3.8). On peut aussi donner une interprétation graphique de $n(L, l)$ comme le nombre de chemins de $2L$ pas aboutissant à l sur un diagramme de Bratteli, représentant en ordonnée le nombre de spins considérés et en abscisse les irrep en lesquelles l'espace se décompose. Un exemple est donné dans la Fig. (3.6). Notons que l'interprétation physique de m est très simple, et est directement reliée au flux des flèches pour un temps donné. De plus, dans le modèle des boucles orientées, seules les boucles non triviales contribuent à m , les boucles triviales ne pouvant contribuer. Cette idée sera détaillée dans la prochaine sous-section. Les états $|l, m\rangle$ sont des combinaisons linéaires des états de spin total $S_z = m$. On définit $K_{1,2l+1}$ comme la trace de T_{6V}^N sur l'espace des vecteurs de plus haut poids du type $|l, l\rangle$:

$$K_{1,2l+1} = \text{Tr}_{S=S_z=l}[T_{6V}^N]. \quad (3.41)$$

Ainsi, les $K_{1,2l+1}$ contiennent tous les niveaux d'énergie différents, puisque comme T_{6V} commute avec $U_q(sl(2))$, les vecteurs de plus haut poids et leurs descendants ont même énergie. Nous verrons dans la suite que cette définition des $K_{1,2l+1}$ est bien équivalente à celle donnée précédemment.

Décomposons la fonction de partition Z à l'aide des $K_{1,2l+1}$. La fonction de partition n'est pas simplement donnée par la trace de T_{6V}^N , car les boucles non triviales n'ont pas le bon poids \sqrt{Q} . Afin de donner le bon poids, il est nécessaire de twister le modèle :

$$Z = \text{Tr}[q^{2S_z} T_{6V}^N]. \quad (3.42)$$

En effet, si on a n boucles non triviales, on peut écrire :

$$(\sqrt{Q})^n = (q + q^{-1})^n = \sum q^{2S_z}, \quad (3.43)$$

la somme portant sur les orientations possibles des n boucles. En utilisant les définitions des $K_{1,2l+1}$ et de la q -dimension, voir Eq. (3.39), on obtient la décomposition suivante de Z :

$$Z = \sum_{l=0}^L (2l+1)_q K_{1,2l+1} \quad (3.44)$$

qui est identique à celle obtenue section (3.1). Les coefficients $c^{(l)}$ valent $(2l+1)_q$ car les dimensions des irreps l sont $2l+1$, et le fait de twister le modèle à six vertex q -déforme ces dimensions.

Nous avons raisonné à l'aide des irreps de $U_q(sl(2))$, mais dans le cas de CL différentes ce n'est pas possible. On est alors obligé de raisonner avec les irreps de l'algèbre des opérateurs constituant T_{6V} . Ainsi, une autre façon de voir les choses est de considérer les irreps de l'algèbre de TL [19]. Ces irreps sont alors indexées par l , et $n(L, l)$, donné par l'Eq. (3.40), s'interprète alors non plus comme le nombre d'irreps de $U_q(sl(2))$ de type l , mais comme la dimension de l'irrep de l'algèbre de TL de type l ; tandis que la dimension $2l+1$ de l'irrep de $U_q(sl(2))$ de type l correspond au nombre d'irreps de l'algèbre de TL. En résumé, on a :

$$\sum_{l=0}^L (2l+1) n(L, l) = 4^L \quad (3.45)$$

et selon l'algèbre considérée, les $(2l+1)$ et $n(L, l)$ seront des multiplicités ou des dimensions d'irreps.

3.2.3 Equivalence entre méthode algébrique et méthode combinatoire

Il n'est pas évident que les $K_{1,2l+1}$ définis par l'Eq. (3.41) coïncident avec ceux définis par l'Eq. (3.12). Nous l'avons prouvé dans [51]. Pour cela, nous avons montré qu'on a les mêmes décompositions des $K_{1,2l+1}$ en fonction des Z_{2j+1} que celles obtenues précédemment.

Notons que :

$$K_{1,2l+1} = F_{2l+1} - F_{2(l+1)+1} , \quad (3.46)$$

où F_{2l+1} est défini comme la trace de T_{6V}^N sur l'espace engendré par tous les vecteurs de spin $S_z = l$, pas seulement les vecteurs de plus haut poids.

$$F_{2l+1} = \text{Tr}_{S_z=l}[T_{6V}^N] . \quad (3.47)$$

La raison est analogue à celle donnée pour démontrer l'Eq. (3.40). Nous allons donc d'abord décomposer F_{2l+1} , car seul S_z a une interprétation simple dans le modèle à six vertex et le modèle des boucles orientées, et nous déduirons la décomposition de $K_{1,2l+1}$ avec l'Eq. (3.46).

Considérons une configuration de boucles orientées contribuant à Z_{2j+1} , i.e. avec $2j$ boucles non contractibles (on rappelle que pour j amas non triviaux, il y a $2j$ boucles non triviales). Comme les boucles triviales ne contribuent pas à S_z , il n'y a pas de contraintes sur leurs orientations, et comme expliqué dans la sous-section 3.2.3, après sommation sur leurs orientations on obtient bien un poids \sqrt{Q} par boucle. Parmi les $2j$ boucles non triviales, $j+l$ (resp. $j-l$) boucles doivent être orientées vers la droite (resp. gauche), de manière à avoir un spin total $S_z = l$ (l est forcément inférieur à j), comme représenté dans la Fig. (3.7). Par conséquent, il y a $\binom{2j}{j-l}$ orientations possibles des $2j$ boucles non contractibles compatibles avec la valeur $S_z = l$.

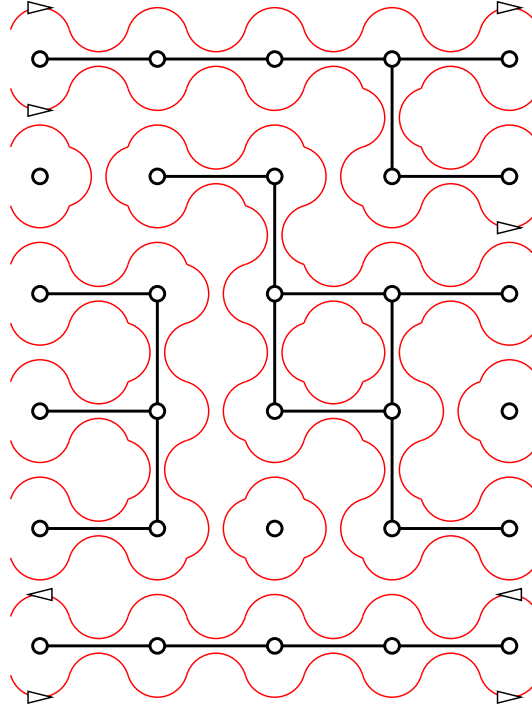


FIG. 3.7 – Configuration de boucles correspondant à la configuration d’amas de la Fig. (3.2). Les boucles triviales peuvent avoir n’importe quelle orientation (elle n’est pas représentée), tandis que celle des boucles non triviales est contrainte par la valeur de S_z . Nous avons représenté une des quatre orientations possibles des $2j = 4$ boucles non triviales correspondant à $S_z = 1$.

En tenant compte du fait que pour une orientation donnée, une boucle non contractible a un poids 1 au lieu de Q , comme expliqué dans la sous-section 3.2.2, on obtient la décomposition suivante pour F_{2l+1} :

$$F_{2l+1} = \sum_{j=l}^L \binom{2j}{j-l} \frac{Z_{2j+1}}{Q^j}. \quad (3.48)$$

En utilisant l’Eq. (3.46) et en se rappelant l’expression de $n(j, l)$ donnée Eq. (3.8), on retrouve bien l’Eq. (3.15), ce qui implique l’équivalence entre les méthodes.

3.3 Limite continue

3.3.1 Diagramme de phase

Nous avons obtenu des décompositions de Z pour des CL cycliques. Il est particulièrement intéressant de considérer la limite continue de ces décompositions, car on retrouve alors des résultats connus en théorie conforme. Nous exposons dans cette sous-section les résultats existant sur la structure du diagramme de phase du modèle de Potts. Dans la sous-section suivante, nous nous intéresserons à la limite continue aux points fixes du diagramme.

Considérons un modèle de Potts défini sur un réseau carré. Le diagramme de phase ne dépend pas des CL. Depuis les travaux de Baxter [37], on sait qu’il y a quatre points cri-

tiques pour Q générique : un point ferromagnétique x_{FM} , et trois points critiques dans la zone antiferromagnétique x_+ , x_{BK} , x_- :

$$x_{FM} = 1 \quad (3.49)$$

$$x_+ = -\frac{2}{\sqrt{Q}} + \sqrt{\frac{4-Q}{Q}} \quad (3.50)$$

$$x_{BK} = -1 \quad (3.51)$$

$$x_- = -\frac{2}{\sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{4-Q}{Q}}. \quad (3.52)$$

Ces points critiques, formant des courbes dans le plan (Q, v) , sont représentées Fig. (3.8) (x et v sont reliés par $x = \frac{v}{\sqrt{Q}}$). Baxter a déterminé l'énergie libre du système le long de ces courbes. $v_{FM}(Q)$ et $v_{BK}(Q)$ sont des courbes autoduales, et ont déjà été obtenues au chapitre 1, tandis que $v_+(Q)$ et $v_-(Q)$ sont duales l'une de l'autre. L'avantage d'avoir représenté v au lieu de x est de voir que $v_{BK}(Q)$ est simplement le prolongement analytique de $v_{FM}(Q)$ dans la région antiferromagnétique. En plus de ces points critiques, on a les points fixes triviaux $v = \infty$ (ferromagnétique à température nulle), $v = 0$ (température infinie) et $v = -\infty$ (domaine non physique). Ces trois points fixes triviaux sont attractifs dans l'IR par le flot de renormalisation, l'opérateur énergie étant non pertinent au voisinage de ces points. $v_{FM}(Q)$, $v_+(Q)$ et $v_-(Q)$ sont donc répulsifs, tandis que $v_{BK}(Q)$ est attractif. Ainsi, les propriétés à grande distance du modèle, lorsque $v_- < v < v_+$ sont déterminées par $v_{BK}(Q)$: on appelle cette zone phase de Berker-Kadanoff. Nous donnerons les caractéristiques de ces points critiques dans la prochaine sous-section.

La structure du diagramme de phase est identique lorsque le modèle est défini sur un réseau triangulaire, les valeurs de $v_{FM}(Q)$, $v_+(Q)$, $v_{BK}(Q)$ et $v_-(Q)$ changeant. $v_{FM}(Q)$, $v_{BK}(Q)$ et $v_-(Q)$ sont maintenant des branches autoduales [38],[39] : ce sont les racines de l'équation d'autodualité $v^3 + 3v^2 = Q$ obtenue Eq. (1.26) (cette équation admettant bien trois racines réelles pour Q compris entre 0 et 4). La position de $v_+(Q)$ est par contre mal connue, à l'exception de certains points. Le diagramme est représenté dans la Fig. (3.9).

3.3.2 Caractéristiques des points critiques

On peut déterminer numériquement les caractéristiques des points critiques en fixant la température v à la valeur considérée, et en étudiant le spectre de la matrice de transfert, par la méthode exposée chapitre 2. C'est Saleur qui les a déterminées dans [17], et dans cette sous-section nous exposons ses résultats.

La charge centrale correspondant au point ferromagnétique vaut [17] :

$$c = 1 - \frac{6}{p(p-1)} \quad (3.53)$$

et à des opérateurs de dimension :

$$h_l = \frac{l(l(p-1)-1)}{p}. \quad (3.54)$$

Par identification, on a donc une théorie conforme de paramètre $\mu = p - 1$ (voir Eq. (2.24)), et des opérateurs de bord de dimension $h_{1,2l+1}$ (voir Eq. (2.25)) avec les CL transverses libres

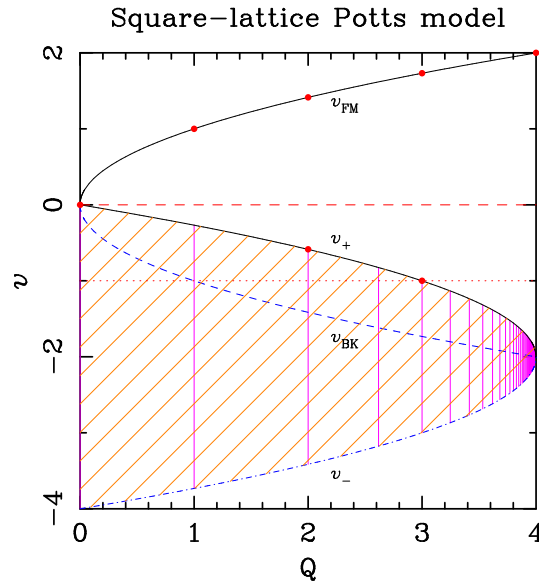


FIG. 3.8 – Diagramme de phase générique du modèle de Potts sur réseau carré dans le plan (Q, v) . La courbe dans la région ferromagnétique ($v \geq 0$) correspond à la transition ferromagnétique standard $v_{FM}(Q)$, tandis que la courbe en pointillés est son prolongement analytique $v_{BK}(Q)$ à la région antiferromagnétique. Cette dernière est une courbe attractive en température sous le groupe de renormalisation. Ainsi, le comportement à grande distance du système pour v compris entre $v_-(Q)$ et $v_+(Q)$ est décrit par cette courbe $v_{BK}(Q)$. La zone délimitée par $v_-(Q)$ et $v_+(Q)$, représentée en hachurés, est appelée phase de Berker-Kadanoff. Cette phase est séparée de la limite de température infinie $v = 0$ par la courbe de transition antiferromagnétique $v_+(Q)$ (courbe en trait plein dans la région $v \leq 0$), et de la limite $v \rightarrow -\infty$ par la courbe duale $v_-(Q)$ (représentée en pointillés). Les traits verticaux indiquent les valeurs de Q égales à des nombres de Beraha, pour lesquelles le diagramme de phase n'est pas correct.

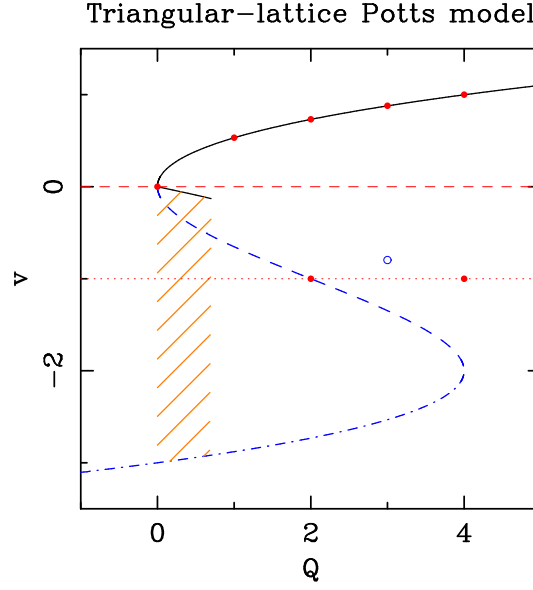


FIG. 3.9 – Diagramme de phase générique du modèle de Potts sur réseau triangulaire dans le plan (Q, v) . La frontière supérieure $v_+(Q)$ de la phase de Berker-Kadanoff est encore mal connue. On sait simplement que $v_+(0) = 0$ et on a une évaluation numérique de la pente à l'origine $\frac{d}{dQ}v_+(0) = -0.1753 \pm 0.0002$ [50].

choisies. De plus, les opérateurs $\phi_{1,2l+1}$ correspondent au secteur à l ponts. Ainsi, $K_{1,2l+1}$ dans la limite continue correspond au caractère $K_{1,2l+1}$ associé à $\phi_{1,2l+1}$ (et ses descendants), donné par l'Eq. (2.26).

Les caractéristiques du point de BK s'obtiennent en utilisant le fait qu'il est un prolongement du point ferromagnétique dans la zone antiferromagnétique. Ainsi, v vaut $-\sqrt{Q}$ au lieu de \sqrt{Q} en ce qui concerne le réseau carré, ce qui revient à changer p , $p \in [2, +\infty[$ en $p' = \frac{p}{p-1}$, $p' \in [1, 2]$, de façon à changer \sqrt{Q} en son opposé (voir Eq. (1.10)), sans pour autant changer le poids Q d'un amas puisque $Q = (\sqrt{Q})^2 = 4 \cos^2(\frac{\pi}{p})$ (lorsque p parcourt l'intervalle $[1, +\infty[$, Q parcourt deux fois l'intervalle $[0, 4]$). En remplaçant p par p' dans les caractéristiques du point ferromagnétique, on obtient donc celles du point fixe de BK. Par conséquent, la charge centrale est [17] :

$$c = 1 - \frac{6(p-1)^2}{p}, \quad (3.55)$$

et l'opérateur de bord associé au secteur l a pour dimension holomorphe :

$$h_l = \frac{l(l-p+1)}{p}. \quad (3.56)$$

h_l correspond donc à $h_{1,2l+1}$, en accord avec les résultats de Duplantier et Saleur sur les marches auto-évitantes [20], puisqu'à l amas non triviaux correspondent $2l$ boucles non contractibles.

Les points antiferromagnétiques v_+ et v_- ont la même limite continue, puisqu'ils sont duaux l'un de l'autre. La charge centrale est [25],[24] :

$$c = 2 - \frac{6}{p}, \quad (3.57)$$

et les dimensions holomorphes des opérateurs de bord sont :

$$h_l = \frac{l(l+1)}{p} . \quad (3.58)$$

Saleur a montré qu'il s'agit d'une théorie parafermionique, de paramètre $N = p - 2$ (en accord avec le fait que N joue un rôle similaire à $\mu - 1$). Les opérateurs de bord sont les opérateurs ϵ_l (comparer les Eq. (3.58) et Eq. (2.37)), et $K_{1,2l+1}$ correspond dans la limite continue à K_l donné par l'Eq. (2.38).

Dans la limite continue, les développements deviennent plus simples. Considérons la limite continue au point ferromagnétique de l'Eq.(3.26), développement de la fonction de partition pour des CL cycliques fixées :

$$Z_{++}(\tau) = \sum_{l=0}^L b^{(l)} K_{1,2l+1}(y) , \quad (3.59)$$

τ et y ayant été définis au chapitre 2. Ainsi, le facteur global $\frac{\exp(2NK)}{Q^{2-S_D v B}}$ correspondant à Z_{ff} dans la limite thermodynamique disparaît, car l'énergie de Casimir est choisie nulle dans la limite des grandes tailles. De plus, le fait que Z_{++} et les $K_{1,2l+1}$ n'étaient pas évaluées pour les mêmes largeurs et températures n'a pas de conséquence, car dans la limite continue L et $L + 1$ correspondent à la même valeur de y (ce qui importe c'est le rapport $\frac{L}{N}$, L et N tendant vers l'infini), et car le point ferromagnétique est autodual.

Nous faisons ici une remarque essentielle pour la compréhension. Les développements exacts de fonctions de partition pour un réseau discret sont valables pour n'importe quelle valeur de Q , même lorsque p est entier, car d'après le développement de Fortuin-Kasteleyn [2],[3] la fonction de partition est un polynôme en Q et donc n'a pas de singularités en Q . Par contre, les résultats de cette sous-section, qui correspondent à la limite continue du modèle, ne sont valables qu'à p entier, car ils supposent que les valeurs propres dominantes dans la représentation en amas ont une amplitude non nulle (or comme on le verra dans le chapitre 5 il y a des annulations pour p entier). En fait, dans la zone ferromagnétique, les résultats donnés sont valables aussi à p entier, car les valeurs propres s'annulant sont sous-dominantes. Par exemple, l'Eq. (3.53) est valable même à p entier. Ce n'est plus le cas lorsqu'on considère la zone $x < 0$. Ainsi, l'Eq. (3.55) est fausse pour p entier [93],[17].

3.3.3 Intégrabilité

Il existe des méthodes analytiques permettant de déterminer le spectre de la matrice de transfert T_{6V} lorsque x prend certaines valeurs, et donc de démontrer les résultats de la sous-section précédente. En particulier, pour $x = 1$ sur réseau carré, on peut utiliser l'intégrabilité du modèle à six vertex correspondant. Nous exposons ici cette procédure, due à Saleur et Bauer [18].

Pour $x = 1$, le modèle à six vertex équivalent au modèle de Potts est simple car il est homogène, les poids correspondant aux vertex situés sur les liens horizontaux ou verticaux étant identiques, et "sans champ", i.e. invariant par renversement des flèches, ce qui fait qu'il n'y a que trois poids distincts. Nous allons relier ce modèle à des modèles à six vertex avec des poids différents, c'est pourquoi nous présentons le modèle à six vertex homogène et sans champ dans sa généralité, et nous préciserons ensuite les valeurs des poids à donner pour avoir l'équivalence avec le modèle de Potts à $v = 1$, pour le nombre d'états Q considéré.

Les trois poids sont notés α , β et γ , et sont paramétrés par ρ , λ et u de la façon suivante :

$$\alpha = \rho \sin(\lambda - u) \quad (3.60)$$

$$\beta = \rho \sin(u) \quad (3.61)$$

$$\gamma = \rho \sin(\lambda) \quad (3.62)$$

ρ est un facteur de normalisation ne jouant pas de rôle, λ est appelé paramètre d'anisotropie, et u paramètre spectral. La valeur de λ peut être facilement déterminée à partir de δ défini comme :

$$\delta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = -\cos \lambda . \quad (3.63)$$

Il est possible de montrer que pour $|\delta| < 1$, i.e. $\lambda \in [0, \pi]$, le modèle est critique, et que les matrices de transfert correspondant à des valeurs différentes de u mais identiques de λ (et donc δ) commutent. De plus, les exposants associés aux matrices de transfert sont identiques, en choisissant bien le facteur d'isotropie b , introduit dans la sous-section 2.2.5 et qui permet de normaliser le pas de temps dont avance la matrice de transfert.

D'après l'expression des poids donnée Fig. (3.5), on voit que le modèle de Potts à Q états et $v = 1$ est associé à $\lambda = \frac{\pi}{p}$, i.e. $\delta = -\frac{\sqrt{Q}}{2}$, et $u = \frac{\lambda}{2}$. On dit que le modèle est isotrope, car dans ce cas les poids α et β , dont les configurations se déduisent l'une de l'autre par rotation, coïncident. L'idée pour déterminer les c et les h_j est de considérer un modèle avec la même valeur de λ , mais une valeur de u différente et choisie de manière à simplifier l'expression de T_{6V} . Le cas $u = 0$ est pathologique, car correspond à un facteur d'isotropie infini (la matrice de transfert est triviale : elle réalise juste une "translation"), mais on peut par contre considérer la dérivée logarithmique de T_{6V} au voisinage de 0. En choisissant correctement la normalisation de cet hamiltonien (de manière à avoir l'invariance conforme), on trouve qu'il vaut :

$$H = \frac{2}{p} \left(\sum_{i=1}^{2L-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{q + q^{-1}}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + \frac{q - q^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_{2L}^z) \right) . \quad (3.64)$$

On peut diagonaliser H en utilisant le fait qu'il y a une infinité de quantités conservées, comme les matrices de transfert avec des paramètres spectraux différents commutent entre elles. En particulier, H commute avec les générateurs de $U_q(sl(2))$, puisque c'était le cas pour la matrice de transfert, et donc on peut aussi décomposer le spectre de H à l'aide des irreps de $U_q(sl(2))$. D'après la conservation de S_z , on peut écrire les états propres de H sous la forme :

$$|\alpha\rangle = \sum f(y_1, \dots, y_n) |y_1, \dots, y_n\rangle , \quad (3.65)$$

les y correspondant à la position des spins $-\frac{1}{2}$. Comme S_z est conservé, le nombre n de spins $-\frac{1}{2}$, encore appelés "particules" (pour faire le lien avec les processus de diffusion) [68], est bien conservé. On appelle l'Eq. (3.65) ansatz de Bethe [64]. L'ansatz pour la forme de f est :

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_P \epsilon_P A(k_{P_1}, \dots, k_{P_n}) \exp(i(k_{P_1} y_1 + \dots + k_{P_n} y_n)) , \quad (3.66)$$

la somme portant sur toutes les permutations et négations (i.e. changement de signe) des "impulsions" k , et ϵ changeant de signe à chaque transformation. En effet, en utilisant l'analogie entre spins $-\frac{1}{2}$ et particules, on cherche des solutions se développant sur une base d'ondes

planes d'impulsions k . Ces ondes planes peuvent entrer en collision, ce qui comme le système est intégrable entraîne juste des permutations entre les impulsions [65], et "rebondir" sur les parois, ce qui entraîne des négations des impulsions. On peut ensuite déterminer les expressions des amplitudes A et les valeurs des niveaux d'énergie, et on trouve bien que dans la limite $L \rightarrow \infty$ le niveau d'énergie fondamental dans le secteur de spin $S_z = l$ vaut :

$$E_l = -\frac{\pi c}{24L} + \frac{\pi h_l}{L}, \quad (3.67)$$

c et h_l ayant été donné précédemment. On a des termes en $\frac{1}{L}$ au lieu de $\frac{1}{L^2}$, car il s'agit de niveaux d'énergie, pas d'énergie par unité de surface, sinon il suffit de diviser H par L .

Chapitre 4

Modèles RSOS

Les modèles de hauteurs sont souvent utilisés en physique statistique. Ils permettent par exemple de décrire des interfaces [63], ou bien les surfaces de cristaux [59]. Ils sont aussi reliés à d'autres modèles. Ainsi, le modèle d'Ising antiferromagnétique à température nulle sur réseau triangulaire peut être appliqué sur un modèle SOS (solid on solid), i.e. un modèle de hauteurs avec contraintes entre voisins [60].

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à un modèle RSOS (restricted solid and solid), "restricted" signifiant que les hauteurs ne peuvent prendre qu'un nombre fini p de valeurs. Il arrive fréquemment que le diagramme spécifiant les contraintes entre hauteurs voisines soit le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Lie ou d'une algèbre de Lie affine. Ces modèles ont été étudiés par Pasquier [23],[72]. Nous nous limitons dans ce chapitre à des modèles A_{p-1} , que nous présentons dans la section 4.1.

Dans la section 4.2, nous considérons un modèle A_{p-1} défini sur le tore. Pasquier, dans [23], a établi un développement en boucles de la fonction de partition du modèle, à l'aide de diagrammes caractérisant la topologie des configurations de boucles. Nous exposons ses résultats dans la sous-section 4.2.1, que nous avons légèrement généralisés dans [21], car Pasquier avait uniquement considéré le cas d'une température x valant 1. Le fait de considérer une température x quelconque permet notamment d'établir des relations de dualité, données dans la sous-section 4.2.2. Dans [23], Pasquier a comparé des fonctions de partition du modèle RSOS avec celles de modèles à six vertex, mais uniquement pour $x = 1$ et dans la limite continue. De plus, il n'a pas comparé directement le modèle RSOS avec le modèle de Potts (le lien entre les fonctions de partition du modèle de Potts et du modèle à six vertex étant non trivial sur le tore). Cependant, nous avons noté que de nombreuses valeurs propres entre les matrices de transfert du modèle RSOS A_{p-1} et du modèle de Potts à $Q = B_p = \left(2 \cos \left(\frac{\pi}{p}\right)\right)^2$ états coïncidaient. Cela nous a donc conduit à penser qu'il y avait des relations exactes, valables quelle que soit la taille du réseau et la température, entre les fonctions de partition de ces deux modèles. Ces relations, que nous avons publiées dans [21], sont données dans les sous-sections 4.2.3, puis 4.2.4 pour les modèles twistés. Les implications sur les spectres des matrices de transfert sont exposées dans la sous-section 4.2.5.

Nous terminons ce chapitre en considérant le modèle RSOS avec des CL cycliques/fixées, en exposant dans la section 4.3.1 les travaux de Saleur et Bauer [18]. Nous donnons la façon de calculer les fonctions de partition correspondantes, notées $\chi_{1,2l+1}$. Ces $\chi_{1,2l+1}$ nous permettront

dans le chapitre 5 d'écrire des développements de la fonction de partition du modèle de Potts à B_p états, et d'étudier le diagramme de phase du modèle.

4.1 Présentation du modèle RSOS

4.1.1 Définition

Un modèle RSOS (restricted solid on solid) est un modèle de hauteurs $h_{i,n}$ définies sur l'union du réseau direct et du réseau dual. Les hauteurs peuvent prendre comme valeurs $1, \dots, p-1$, et des hauteurs voisines doivent obéir à des contraintes, spécifiées par un diagramme. Pasquier a considéré le cas où ce diagramme est le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Lie ou de son extension affine [72]. Nous exposons ici ses travaux, mais uniquement sur les modèles RSOS A_{p-1} (car ce sont les modèles que nous avons considérés dans [21]). Cela correspond à choisir comme contrainte entre voisins $\Delta h = \pm 1$. A ce diagramme de Dynkin est associée la matrice d'incidence G_{p-1} donnée par :

$$G_{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

car par définition ses éléments de matrice valent 1 s'ils correspondent à des valeurs de hauteurs qui sont reliées dans le diagramme de Dynkin, et 0 sinon. Cette matrice d'incidence nous sera particulièrement utile dans la suite, car elle permet de dénombrer simplement le nombre de configurations de hauteurs possibles à un instant donné, en voyant le problème comme une marche aléatoire sur le diagramme de Dynkin. Nous rappelons donc les principales propriétés de cette matrice. Ses valeurs propres λ_k sont :

$$\lambda_k = 2 \cos \left(\frac{k\pi}{p} \right), \quad (4.2)$$

k prenant des valeurs entières entre 1 et $p-1$, et correspondant aux exposants du diagramme A_{p-1} . En particulier, la plus grande valeur propre de G_{p-1} est $\lambda_1 = 2 \cos(\frac{\pi}{p}) = \sqrt{Q}$, ce qui assurera l'égalité des poids des boucles triviales avec le modèle de Potts à Q états, Q valant le nombre de Beraha B_p . Le vecteur propre associé à λ_k est le vecteur de composantes normalisées $(S_h^{(k)})$, $h = 1, \dots, p-1$, les $S_h^{(k)}$ étant proportionnels à des nombres q -déformés :

$$S_h^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \left(\frac{\pi kh}{p} \right) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \left(\frac{\pi}{p} \right) (kh)_q. \quad (4.3)$$

Les composantes $S_h^{(1)}$ du vecteur propre associé à λ_1 seront simplement notées S_h dans la suite.

Le poids d'une configuration de hauteurs est égal au produit des poids de chacune des plaquettes constituées de quatre hauteurs. Andrews, Baxter et Forrester ont étudié en détail le cas où le poids $w(a, b, c, d)$ (les hauteurs étant ordonnées dans le sens trigonométrique à partir

du sud) est donné par [25] :

$$w(h, h \pm 1, h, h \mp 1) = \frac{k(\lambda - u)}{h(\lambda)} \quad (4.4)$$

$$w(h \pm 1, h, h \mp 1, h) = \frac{k(u)}{k(\lambda)} \frac{[k(\lambda(h+1))k(\lambda(h-1))]^{\frac{1}{2}}}{k(\lambda h)} \quad (4.5)$$

$$w(h+1, h, h+1, h) = \frac{k(\lambda h + u)}{k(\lambda h)} \quad (4.6)$$

$$w(h-1, h, h-1, h) = \frac{k(\lambda h - u)}{k(\lambda h)}, \quad (4.7)$$

où u est un paramètre spectral, λ est le paramètre d'anisotropie valant $\frac{\pi}{p}$, et k est une fonction dépendant d'une "température" $t \in [-1, 1]$ et valant :

$$k(x) = 2t^{\frac{1}{4}} \sin x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2t^{2n} \cos x + t^{4n}). \quad (4.8)$$

Les poids ont été définis de manière à satisfaire l'équation de Yang-Baxter. Les calculs montrent qu'il y a quatre régimes distincts, selon les valeurs de t et u [24] :

1. Régime I : $-1 < t < 0$, $-\lambda < u < 0$
2. Régime II : $0 < t < 1$, $-\lambda < u < 0$
3. Régime III : $0 < t < 1$, $0 < u < \lambda$
4. Régime IV : $-1 < t < 0$, $0 < u < \lambda$.

Les transitions de phase ont lieu à $t = 0$, et ne dépendent pas de la valeur précise de u , dans les plages indiquées. Le point critique entre les régimes I et II est du type Z_{p-2} . En effet, le régime I correspond à un état désordonné (les moyennes sont indépendantes des CL dans la limite thermodynamique) et le régime II à une coexistence de $p - 2$ phases. La transition de phase correspond donc à la dégénérescence de $p - 2$ phases, et est dans la même classe d'universalité que le modèle de Potts *chiral* à $p - 2$ états (différent du modèle de Potts considéré jusqu'à présent), défini par des spins σ_i prenant $p - 2$ valeurs ($\sigma_i = 1 \dots p - 2$) et un hamiltonien donné par :

$$-\beta H = K \sum_{\langle ij \rangle} \cos \left(\frac{2\pi}{p-2} (\sigma_i - \sigma_j) \right). \quad (4.9)$$

Cet hamiltonien est invariant sous la transformation globale Z_{p-2} correspondant à $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + 1 \pmod{p}$, d'où le nom de la classe d'universalité. Le point critique entre les régimes III et IV correspond à une théorie minimale unitaire de paramètre $\mu = p - 1$, les régimes III et IV ayant respectivement $p - 2$ et $p - 3$ phases coexistantes. Au niveau de ce point critique, en se plaçant dans le cas isotrope $u = \frac{\lambda}{2}$, les poids w s'écrivent simplement, à un facteur global près :

$$w(a, b, c, d) = \delta(a, c) + \frac{(S_a S_c)^{\frac{1}{2}}}{S_b} \delta(b, d), \quad (4.10)$$

les S_h ayant été définis par l'Eq. (4.3).

On s'attend à ce que le modèle RSOS à ce point critique soit relié au modèle de Potts pour $x = x_{FM}$, car ils ont la même limite continue. Nous montrerons que c'est bien le cas dans la prochaine section. Il faut par contre noter que les déformations hors critiques des deux modèles sont différentes, car une variation en t n'est pas associée au même opérateur que la variation en x du modèle de Potts. Nous allons voir comment introduire x dans le modèle RSOS.

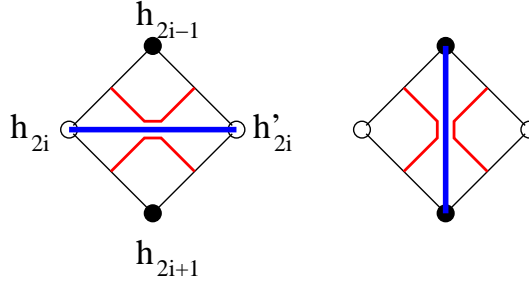


FIG. 4.1 – Représentation graphique de $V_i = I + x e_{2i}$. Les sites directs, resp. duaux, sont des cercles pleins, resp. vides. Les liens coloriés dans la représentation en amas sont indiqués par des lignes. L'action de I , resp. e_{2i} , correspond à la partie gauche, resp. droite, de la figure.

4.1.2 Généralisation

Dans notre article [21], nous avons généralisé le modèle RSOS au cas où x est différent de 1. Pour cela, écrivons la matrice de transfert T lorsque les poids sont donnés par l'Eq. (4.10). T a la même forme que celle du modèle de Potts à B_p états et à la température $x = 1$:

$$T = Q^{\frac{L}{2}} H_L \dots H_2 H_1 V_L \dots V_2 V_1 . \quad (4.11)$$

Le facteur $Q^{\frac{L}{2}}$ correspond à ajouter un facteur global de $Q^{\frac{S}{2}}$ à la fonction de partition, ce qui simplifiera les résultats. Les opérateurs agissent sur l'espace des états des $2L$ hauteurs à un temps donné $|h_1, \dots, h_{2L}\rangle$, qui est de dimension compte tenu des contraintes RSOS $\text{Tr}[G_{p-1}^{2L}]$. Pour L grand, comme la plus grande valeur propre de G_{p-1} est \sqrt{Q} , la dimension est équivalente à Q^L . Cela nous permettra de comprendre pourquoi il faut utiliser la représentation en hauteurs et non en boucles pour étudier le diagramme de phase du modèle de Potts à B_p états. Les V_i et H_i sont des opérateurs ajoutant respectivement des liens verticaux et horizontaux sur le réseau direct. Pour le réseau sur lequel sont définies les hauteurs, V_i correspond à ajouter une face, délimitée par deux sites directs et deux sites duaux, voir Fig. (4.1), H_i jouant un rôle analogue à condition d'échanger sites directs et duaux. Ces opérateurs s'expriment en fonction d'opérateurs e_i formant une algèbre de Temperley-Lieb :

$$H_i = I + e_{2i-1} \quad (4.12)$$

$$V_i = I + e_{2i} . \quad (4.13)$$

En utilisant l'Eq. (4.10), on trouve que l'action des opérateurs e_i est donnée par [23] :

$$\begin{aligned} e_i |h_1, \dots, h_{i-1} \rangle, \quad |h_i, h_{i+1}, \dots, h_{2L}\rangle & \\ = \delta(h_{i-1}, h_{i+1}) \sum_{h'_i} \frac{(S_{h_i})(S_{h'_i})^{\frac{1}{2}}}{S_{h_{i-1}}} |h_1, \dots, h_{i-1}, h'_i, h_{i+1}, \dots, h_{2L}\rangle . \end{aligned} \quad (4.14)$$

e_i est donc un opérateur permettant de changer la i -ème hauteur, à condition que les $i-1$ -ème et $i+1$ -ème hauteurs aient la même valeur. Nous avons donc encore une représentation de l'algèbre de TL, en l'occurrence une représentation en hauteurs. Il est donc naturel d'introduire le paramètre x en posant :

$$H_i = x I + e_{2i-1} \quad (4.15)$$

$$V_i = I + x e_{2i} . \quad (4.16)$$

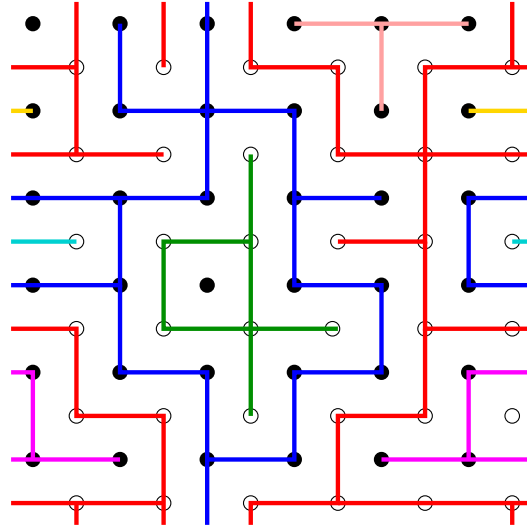


FIG. 4.2 – Une configuration d’amas sur le tore 6×6 . Les sites directs, resp. duaux, sont des cercles pleins, resp. vides. Il y a six amas directs et quatre amas duaux. Il y a un amas direct (en bleu) et un amas dual (en rouge) qui sont non-triviaux, i.e. qui ne sont pas homotopes à un point.

Nous allons dans la prochaine section montrer que le modèle RSOS à p valeurs possibles pour les hauteurs et de paramètre x est équivalent, à des termes topologiques près, au modèle de Potts à $Q = B_p$ états et à la température x .

4.2 Cas des CL toroïdales

4.2.1 Diagramme de Pasquier

Nous exposons ici les travaux de Pasquier [23], que nous avons légèrement généralisés au cas de x quelconque dans notre article [21]. Comme dans le cas du modèle de Potts, on peut effectuer un développement en amas de la fonction de partition $Z_{\text{RSOS}} = \text{Tr}[T_{\text{RSOS}}^N]$, en associant à I un trait vertical et à e_i un trait horizontal. Une configuration possible d’amas est représentée dans la Fig. (4.2). Notons qu’il suffit de donner la configuration d’amas sur le réseau direct, comme la configuration d’amas sur le réseau dual est alors fixée (par les règles de dualité habituelles). La contribution d’une configuration d’amas à la fonction de partition Z_{RSOS} du modèle RSOS consiste en :

1. un facteur global de $Q^{\frac{S}{2}}$, provenant du préfacteur $Q^{\frac{L}{2}}$ de l’Eq. (4.11),
2. un facteur de x pour chaque lien *direct* colorié,
3. un facteur indépendant de x , fonction uniquement de la topologie des amas directs et duaux, qu’on note w .

Pour déterminer le poids w , on utilise un diagramme de Pasquier, représenté Fig. (4.3). Les règles pour tracer le diagramme de Pasquier associé à une configuration d’amas sont les suivantes. Chaque amas est représenté par un site. Les sites correspondant à des amas voisins, i.e. ayant une frontière en commun (on rappelle que les boucles sont définies sur le réseau médial

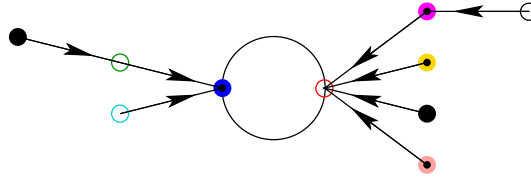


FIG. 4.3 – Diagramme de Pasquier correspondant à la configuration d'amas de la Fig. (4.2). Les amas directs, resp. duaux, sont représentés par des cercles pleins, resp. vides, et les amas voisins sont reliés par un lien. Les flèches indiquent si les amas entourent ou sont entourés par les boucles les séparant. La diagramme a une structure en arbre, à l'exception des amas non triviaux qui forment un cycle.

et délimitent les amas) sont reliés par un lien orienté. Notons que parmi deux amas voisins, l'un est forcément direct et l'autre dual. L'orientation du lien est choisie telle que si le lien est dirigé du site A au site B , alors la boucle commune entoure l'amas A et est entourée par l'amas B (l'amas B est plus "grand" que l'amas A). On définit les degrés b_{in} et b_{out} d'un amas donné respectivement comme le nombre de frontières entourées par l'amas et entourant l'amas. On n'oriente pas les liens reliant des amas non triviaux, car dans ce cas cette notion n'a pas de sens. Le diagramme de Pasquier a la structure suivante :

1. le diagramme est bicoloreable : on représente les amas directs, resp. duaux, par des cercles pleins, resp. vides.
2. les sites correspondant à des amas non triviaux et les liens non orientés forment un cycle. On définit l'ordre n du diagramme comme le nombre de liens non orientés. D'après la propriété précédente, n est pair. Si $n = 0$ le diagramme est dégénéré : il n'y a qu'un seul amas non trivial, direct ou dual. Si n est non nul, il y a $\frac{n}{2}$ amas non triviaux directs et $\frac{n}{2}$ amas non triviaux duaux.
3. chaque site correspondant à un amas non trivial est la racine d'un arbre (possiblement inexistant), dont les sites correspondent à des amas triviaux et dont les liens sont dirigés vers la racine. En effet, les amas non triviaux ont une unique frontière externe, et donc ont tous $b_{\text{out}} = 1$.

Déterminons maintenant le poids w associé à une configuration d'amas. Il faut sommer la partie du poids correspondant à la configuration d'amas sur toutes les configurations de hauteurs compatibles avec cette dernière. w peut être déterminé à l'aide du diagramme de Pasquier, en utilisant la matrice d'incidence G_{p-1} . Le poids d'un amas de hauteur h fixée est $S_h^{b_{\text{out}} - b_{\text{in}}}$. Il reste à effectuer la sommation sur les valeurs possibles des hauteurs. Pour cela, on considère le diagramme obtenu en enlevant une branche à l'une des extrémités d'un arbre du diagramme, et on appelle w' le poids correspondant. En notant j la hauteur du site supprimé et i celle de son parent, et w'_i le poids w' lorsque la hauteur du parent est fixée à i ($w' = \sum_{i=1}^{p-1} w'_i$), on démontre la relation suivante entre w et w' :

$$w = \sum_{i=1}^{p-1} w'_i (S_i)^{-1} \sum_{j=1}^{p-1} (G_{p-1})_{ij} S_j = \sum_{i=1}^{p-1} w'_i (S_i)^{-1} \sqrt{Q} S_i \quad (4.17)$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} w'_i \sqrt{Q} = \sqrt{Q} w'. \quad (4.18)$$

Pour écrire la première égalité, on a tenu compte du fait que la hauteur j était supprimée dans w'_i , et que b_{in} pour la hauteur i diminuait de 1 lorsqu'on passe de w à w' . La contrainte RSOS entre les hauteurs voisines i et j a été implémentée à l'aide de la matrice d'incidence G_{p-1} . Ensuite, on a utilisé que (S_j) est un vecteur propre de G_{p-1} , de valeur propre \sqrt{Q} . Après sommation sur i , on obtient le résultat final $w = \sqrt{Q} w'$. En itérant le processus, on en déduit que toutes les boucles triviales ont un poids \sqrt{Q} , comme pour le développement en boucles du modèle de Potts, et ainsi que :

$$w = Q^{\frac{l-n}{2}} w_c, \quad (4.19)$$

où l est le nombre de boucles de la configuration, i.e. le nombre total de liens du diagramme de Pasquier, et donc $l - n$ est le nombre de boucles triviales, i.e. le nombre de liens situés dans les arbres du diagramme de Pasquier. w_c est le poids du cycle du diagramme de Pasquier, et correspond aux boucles non triviales. Nous allons maintenant voir que les poids des boucles non triviales sont différents entre le modèle RSOS et le modèle de Potts.

Comme les amas non triviaux ont un poids 1 pour une hauteur fixée, w_c est simplement égal au nombre de configurations de hauteurs compatibles avec le cycle. Il est donc égal au nombre de chemins fermés de n pas sur le diagramme de Dynkin :

$$w_c = \text{Tr}[G_{p-1}^n] = \sum_{k=1}^{p-1} \left(2 \cos \left(\frac{k\pi}{p} \right) \right)^n, \quad (4.20)$$

où l'on a utilisé l'expression des valeurs propres de G_{p-1} , donnée par l'Eq. (4.2) (il n'est pas a priori évident que le terme de droite est un entier). Notons que contrairement au cas des boucles triviales, toutes les valeurs propres de G_{p-1} contribuent, et qu'on ne peut pas en général interpréter w_c comme un produit de poids individuels de boucles.

4.2.2 Dualité

Le fait d'avoir considéré le modèle RSOS pour n'importe quelle température x permet d'écrire des relations de dualité, comme nous l'avons expliqué dans [21]. A cause des contraintes RSOS, les hauteurs situées sur le réseau dual ont une parité fixée et opposée à celle des hauteurs situées sur le réseau direct. On peut donc définir $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x)$ et $Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x)$, les fonctions de partition du modèle RSOS avec respectivement des hauteurs duales paires et impaires. On a simplement $Z_{\text{RSOS}}(x) = Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) + Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x)$. Comparons les poids des diagrammes de Pasquier dans $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x)$ et $Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x)$. Comme les boucles triviales ont un poids \sqrt{Q} (l'argument donné précédemment n'est pas modifié), il suffit de considérer le poids w_c des cycles.

Dans le cas d'un diagramme non dégénéré, i.e. d'ordre $n \neq 0$, les nombres d'amas non triviaux directs et duaux sont égaux, $n = 2k$ étant pair. w_c^{even} , poids du cycle dans $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x)$, est égal au nombre de configurations de hauteurs compatibles avec le cycle et paires lorsqu'elles sont duales. Il s'agit donc des configurations de hauteurs $\{h_1, h_2, \dots, h_{2k}\}$ telles que $h_i = 1, 2, \dots, p-1$ et $|h_{i+1} - h_i| = \pm 1$, avec h_1 pair (i étant défini modulo $2k$, et $i = 1$ correspondant à une hauteur duale). En changeant la numérotation des amas du cycle $i \rightarrow i + 1 \pmod{2k}$, chacune de ces configurations de hauteurs est associée bijectivement à une configuration de hauteurs compatible avec h_1 impair. Par conséquent, $w_c^{\text{even}} = w_c^{\text{odd}} = \frac{w_c}{2}$ pour un cycle non dégénéré.

L'argument ne s'applique plus pour un cycle dégénéré, car il n'y a alors qu'un seul amas non trivial, percolant selon les deux directions du tore. En comptant simplement le nombre de

valeurs d'une parité donnée, on obtient que :

$$w_c^{\text{even}} = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \quad w_c^{\text{odd}} = \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil, \quad (4.21)$$

si l'amas non trivial est direct. S'il est dual, il suffit de permuter w_c^{even} et w_c^{odd} .

Dans le cas où p est impair, $w_c^{\text{even}} = w_c^{\text{odd}}$ pour tous les cycles, et donc

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) \text{ pour } p \text{ impair.} \quad (4.22)$$

Ce résultat peut se prouver de façon directe en notant que le modèle RSOS est invariant sous la transformation $h \rightarrow p-h$, car $S_h = S_{p-h}$. Pour p impair, cette transformation change la parité des hauteurs, et on en déduit l'Eq.(4.22), ainsi qu'une égalité plus forte portant sur les matrices de transfert, à savoir $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}} = T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$. En revanche, pour p pair, cette transformation ne change pas la parité, et donc $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}} \neq T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$, les deux matrices n'ayant même pas des dimensions égales. Elle impose juste des contraintes au sein d'un secteur de parité donné.

On peut cependant, quelle que soit la parité de p , écrire une relation de dualité plus faible que l'Eq.(4.22) :

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = x^B Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x^{-1}), \quad (4.23)$$

ce qui implique comme corollaire que l'Eq.(4.22) pour $x = 1$ est vérifiée aussi pour p pair. Pour prouver l'Eq. (4.23), on note que chaque configuration d'amas est en bijection avec une configuration d'amas "décalée", obtenue en fixant les liens coloriés et en décalant le réseau d'un demi pas selon les deux directions, i.e. en échangeant les sites directs et duaux. La configuration décalée a le même diagramme de Pasquier que la configuration de départ, excepté que les sites directs et duaux sont échangés, et donc leur parité aussi. Par conséquent, w_c^{even} de la configuration initiale est égal à w_c^{odd} de la configuration décalée et vice versa, ce qui implique l'Eq. (4.23), le facteur x^B et le fait que $Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ soit évaluée en x^{-1} permettant d'avoir des puissances de x identiques des deux côtés, car le nombre total de liens coloriés, directs et duaux, vaut B .

En soustrayant l'Eq. (4.23) avec la même Eq. où x est remplacé par x^{-1} , on obtient une relation de dualité pour $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$:

$$\boxed{Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = -x^B (Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x^{-1}) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x^{-1}))}. \quad (4.24)$$

Les membres de gauche et de droite de l'égalité ne sont non nuls que pour p pair. Nous allons maintenant montrer que $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ est égal à une différence de fonctions de partition du modèle de Potts.

4.2.3 Relations entre fonctions de partition

Nous avons vu sous-section 1.2.3 que pour un réseau *plan*, les boucles avaient un poids \sqrt{Q} dans le développement en boucles du modèle de Potts :

$$Z_{\text{Potts}} = Q^{\frac{S}{2}} \sum_{G'} \sqrt{Q}^{l(G')} x^{b(G')} \quad (4.25)$$

la somme porte sur les configurations d'amas G' , et $l(G')$ est le nombre de boucles (frontières) entourant ces amas. Cette équation avait été obtenue en utilisant la relation d'Euler $l(G') + S =$

$2n(G') + b(G')$, voir Eq. (1.14). Cependant, le réseau considéré ici n'est pas planaire, puisqu'on a des CL toroïdales. La relation d'Euler doit alors être modifiée pour les configurations dégénérées où l'amas non trivial est *direct* (i.e. est défini sur le réseau direct) en $2 + l(G') + S = 2n(G') + b(G')$, et reste inchangée pour les autres. Le développement en boucles pour des CL toroïdales a donc pour expression :

$$Z_{\text{Potts}} = Q^{\frac{S}{2}} \sum_{G'} \sqrt{Q}^{l(G') + \eta(G')} x^{b(G')} , \quad (4.26)$$

où $\eta(G')$ vaut 2 pour une configuration dégénérée avec un amas *direct* percolant dans les deux directions, et 0 pour les autres configurations.

En considérant les poids d'un diagramme de Pasquier dans les deux modèles, on montre pour p pair que :

$$(Q - 1)(Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}) = Z_{\text{Potts}}(x) - x^B Z_{\text{Potts}}(x^{-1}) . \quad (4.27)$$

Cette équation est fausse pour p impair, puisque dans ce cas le membre de gauche est nul, tandis que le membre de droite ne l'est pas. Supposons p pair, et comparons les poids des diagrammes dans les deux membres. Si le diagramme est non dégénéré, nous avons vu que son poids à gauche est nul, et c'est aussi le cas à droite, car les configurations originale et décalée ont même nombre l de boucles et même valeur nulle de η . Si le diagramme est dégénéré, avec un amas non trivial direct, sa contribution à gauche est $(Q - 1) Q^{\frac{l}{2}}$, car d'après l'Eq. (4.21), $w_c^{\text{even}} - w_c^{\text{odd}} = 1$. Comme la configuration originale a $\eta = 2$, tandis que la configuration décalée a $\eta = 0$, la contribution à droite vaut $Q^{\frac{l+2}{2}} - Q^{\frac{l}{2}}$, et est bien égale à celle de gauche. Si le diagramme est dégénéré, avec un amas non trivial dual, on montre qu'il y a égalité par un raisonnement similaire (il y a un changement de signe des deux côtés), ce qui finit de prouver l'Eq. (4.27).

L'Eq. (4.27), bien que tautologique au niveau du point autodual $x = 1$, permet tout de même d'obtenir des résultats non triviaux pour cette valeur de x , par dérivation par rapport à x et évaluation en $x = 1$. Par exemple, en dérivant une fois, on obtient :

$$\langle b \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - \langle b \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{odd}} = 2 Z_{\text{Potts}}((Q - 1) Z_{\text{RSOS}})^{-1} (\langle b \rangle_{\text{Potts}} - \langle b_D \rangle_{\text{Potts}}) , \quad (4.28)$$

où $b_D = B - b$ est le nombre de liens duaux coloriés. Les dérivées d'ordre supérieur donnent des relations entre les moments d'ordre supérieur de b et b_D . L'Eq. (4.23) donne des résultats analogues par cette procédure, par exemple :

$$\langle b \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{even}} = \langle b_D \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{odd}} \quad (4.29)$$

qui peut être prouvé directement en considérant les configurations décalées.

4.2.4 Modèles twistés

Afin de pouvoir étudier les modèles twistés, discutons plus dans le détail la topologie des amas non triviaux sur le tore. Cela nous servira également au chapitre 6, lorsque nous étudierons le modèle de Potts avec des CL toroïdales. Considérons d'abord le cas non dégénéré, correspondant à un nombre de boucles non triviales $n \neq 0$. Chacune des frontières séparant deux amas non triviaux est une boucle non triviale et autoévitante. En orientant cette boucle de façon arbitraire, on peut la caractériser par une paire d'entiers (i_1, i_2) , où i_1 et i_2 indiquent respectivement combien de fois elle traverse les directions principales horizontale et verticale du tore dans le sens positif. Nous utilisons deux résultats essentiels [29] :

1. $|i_1|$ et $|i_2|$ sont copremiers, et donc en particulier ont des parités différentes.
2. les orientations relatives des boucles peuvent être choisies de manière à ce que toutes les boucles aient le même (i_1, i_2) . Cela s'explique par le fait que des boucles distinctes d'une configuration donnée ne peuvent se couper, et donc ont la même topologie. De plus, par un choix global d'orientation, on peut supposer que $i_1 \geq 0$. Dans la suite, on supposera également que $i_2 \geq 0$, car on peut changer le signe de i_2 en considérant une image par un miroir de la configuration de départ, cette transformation laissant son poids inchangé dans les deux modèles.

Par extension, on définit la classe d'homotopie des amas non triviaux par la paire (i_1, i_2) caractérisant les boucles. Par exemple, les amas percolant seulement horizontalement correspondent à $(1, 0)$, et ceux percolant seulement verticalement à $(0, 1)$. Il y a des amas d'homotopie plus complexe, qui ont à la fois i_1 et i_2 non nuls. Notons d'ailleurs que si l'un des indices est supérieur à deux, alors l'autre est forcément non nul. Dans le cas dégénéré, toutes les boucles sont triviales, et donc la classe d'homotopie de l'amas non trivial est $(0, 0)$.

Nous allons maintenant twister le modèle RSOS. Cela se fait en changeant les valeurs des hauteurs par traversée d'une ligne de coupure horizontale et déformable localement (sa classe d'homotopie est donc $(1, 0)$). Le modèle étant invariant sous $h \rightarrow p - h$, on définit le twist de cette façon (on se limite ici au cas où le twist est une symétrie du modèle, mais ce n'est pas obligatoire [85]), et uniquement pour p pair, car les hauteurs directes et duales doivent avoir des parités fixées et opposées afin de satisfaire la contrainte RSOS. Ce twist est appelé Z_2 car en traversant deux fois la ligne de coupure, on revient à la valeur initiale de la hauteur : on exploite la symétrie sous Z_2 du diagramme de Dynkin A_{p-1} . Ces nouvelles CL transverses changent les poids des diagrammes de Pasquier. Les boucles triviales ont toujours un poids de \sqrt{Q} , car on peut déformer la ligne de coupure de manière à les éviter. Seul le poids w_c des cycles est modifié.

Considérons d'abord le cas non dégénéré $n \neq 0$. Si un amas non trivial a i_2 impair, alors sa hauteur est fixée par $h = p - h$, et vaut donc $\frac{p}{2}$. Mais comme $n \geq 2$, il y a au moins à la fois un amas direct et un amas dual percolant, et comme ils ne peuvent pas avoir la même valeur de hauteur à cause de la contrainte RSOS. Par conséquent, les diagrammes non dégénérés avec i_2 impair ont un poids nul avec les CL Z_2 twistées. Supposons maintenant que i_2 est pair. Le poids du cycle est donné par [21] :

$$w_c^{Z_2} = \text{Tr}[(G_{p-1})^n J_{p-1}] , \quad (4.30)$$

où la matrice J_{p-1} , de dimension $p - 1$, est définie par :

$$J_{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.31)$$

J_{p-1} implémente le saut de $h \rightarrow p - h$ dû à la ligne de coupure. Les matrices G_{p-1} et J_{p-1} commutent, comme on peut le vérifier directement, donc la position de J_{p-1} dans l'Eq. (4.30) n'a pas d'importance. Cela est relié au fait que la ligne de coupure peut être déformée localement. Pour évaluer $w_c^{Z_2}$, on utilise les valeurs propres de G_{p-1} et J_{p-1} . J_{p-1} commutant avec G_{p-1} , il a les mêmes vecteurs propres $|v_k\rangle$, de composantes $S_h^{(k)}$, $h = 1, 2, \dots, p - 1$. Comme les

$|v_k >$ pour k impair, resp. pair, sont symétriques, resp. antisymétriques, sous la transformation $h \rightarrow p - h$, les valeurs propres de J_{p-1} valent $(-1)^{k+1}$. $w_c^{Z_2}$ a donc pour expression :

$$w_c^{Z_2} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} \left(2 \cos \left(\frac{k\pi}{p} \right) \right)^n \text{ pour } n \neq 0. \quad (4.32)$$

Dans le cas dégénéré, $w_c^{Z_2} = 1$, car la valeur des hauteurs situées sur l'amas non trivial est fixée à $\frac{p}{2}$.

Comme pour le modèle non twisté, on peut considérer des secteurs de parité donnée pour les amas directs et duaux. Le poids des boucles triviales est alors inchangé, tandis que les poids des cycles non dégénérés sont donnés par :

$$w_c^{\text{even}, Z_2} = w_c^{\text{odd}, Z_2} = \frac{w_c^{Z_2}}{2} \quad (4.33)$$

pour des raisons analogues au cas du modèle non twisté. Dans le cas dégénéré, $n = 0$, en dénombrant les valeurs possibles des hauteurs, on trouve pour un amas non trivial direct :

$$w_c^{\text{even}, Z_2} = \frac{p}{2} \bmod 2, \quad w_c^{\text{odd}, Z_2} = 1 - \frac{p}{2} \bmod 2. \quad (4.34)$$

Pour un amas dual, il faut échanger les exposants even et odd. En comparant les Eq. (4.21) et (4.34), on démontre la relation suivante entre les modèles twisté et non twisté :

$$\boxed{Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = (-1)^{\frac{p}{2}+1} \left(Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}(x) \right)} \text{ pour } p \text{ pair}. \quad (4.35)$$

On peut également twister le modèle de Potts. Considérons d'abord les cas où Q est entier (et nombre de Beraha) afin de pouvoir utiliser la représentation en spins. Pour $p = 4$, i.e. pour le modèle d'Ising, on définit $Z_{\text{Ising}}^{Z_2}$ en introduisant une ligne de coupure horizontale au delà de laquelle l'état des spins est changé, ce qui est un twist de type Z_2 . Pour $p = 6$, i.e. pour $Q = 3$, on a deux façons indépendantes de twister le modèle, car il y a trois états de spin possibles. $Z_{Q=3}^{Z_2}$ correspond à échanger les états 1 et 2 de spin par traversée de la ligne de coupure, tandis que l'état 3 est invariant. $Z_{Q=3}^{Z_3}$ correspond à permuter cycliquement les trois états de spin : il s'agit d'un twist Z_3 car après trois traversées de la ligne de coupure on revient à l'état de départ. Pour généraliser les définitions de $Z_{Q=3}^{Z_2}$ et $Z_{Q=3}^{Z_3}$ aux valeurs de Q non entières, on raisonne dans la représentation en amas. Dans $Z_{Q=3}^{Z_2}$, les amas directs non triviaux avec i_2 impair et les cycles dégénérés avec un amas direct percolant ont un poids 1, tandis que les autres amas directs ont un poids Q (on rappelle que dans la représentation en amas du modèle de Potts, seuls les amas *directs* ont des poids non triviaux). On définit $Z_{\text{Potts}}^{Q_0=1}$ de cette façon pour n'importe quelle valeur de Q . De même, $Z_{\text{Potts}}^{Q_0=0}$, extension de $Z_{Q=3}^{Z_3}$, correspond à donner un poids nul aux amas directs non triviaux avec i_2 copremier avec 3 et aux cycles dégénérés avec un amas direct percolant, et un poids Q aux autres amas directs.

$Z_{\text{Potts}}^{Q_0=1}$ vérifie la relation de dualité suivante :

$$Z_{\text{Potts}}^{Q_0=1}(x) = x^B Z_{\text{Potts}}^{Q_0=1}(x^{-1}), \quad (4.36)$$

car le poids d'un cycle dégénéré est toujours 1, que l'amas soit direct ou dual, ce qui explique pourquoi l'Eq. (4.36) est maintenant vraie, tandis qu'elle était fausse pour le modèle non twisté

à cause des diagrammes de Pasquier dégénérés. Pour $Z_{\text{Potts}}^{Q_0=0}$, on a une relation de dualité de la forme :

$$Z_{\text{Potts}}(x) - x^B Z_{\text{Potts}}(x^{-1}) = -(Q-1) \left(Z_{\text{Potts}}^{Q_0=0}(x) - x^B Z_{\text{Potts}}^{Q_0=0}(x^{-1}) \right) \text{ pour } p \text{ pair} . \quad (4.37)$$

En effet, les deux membres de l'égalité sont non nuls uniquement à cause des diagrammes de Pasquier dégénérés, et donc en comparant les poids des cycles dans les modèles twisté et non twisté on obtient l'Eq. (4.37). En combinant cette équation avec l'Eq. (4.27), on obtient une relation entre ce modèle twisté et le modèle RSOS :

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - x^B Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = - \left(Z_{\text{Potts}}^{Q_0=0}(x) - x^B Z_{\text{Potts}}^{Q_0=0}(x^{-1}) \right) \text{ pour } p \text{ pair} . \quad (4.38)$$

Notons que toutes ces relations sont correctes uniquement grâce au poids Q_0 choisi pour les cycles dégénérés contenant un amas direct. Par conséquent, un autre modèle avec la même valeur de Q_0 mais d'autres poids pour les autres amas vérifierait ces équations. Pour $Q = 3$, on a une relation supplémentaire entre les deux modèles, qui peut se démontrer en considérant les poids de tous les types possibles de diagrammes de Pasquier et l'expression explicite des valeurs propres de G_5 :

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) + Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) = Z_{Q=3}(x) + Z_{Q=3}^{Z_2}(x) . \quad (4.39)$$

4.2.5 Implications sur les matrices de transfert

Nous avons établi diverses relations entre les fonctions de partition de plusieurs modèles différents, mais qui se "ressemblent". Une illustration frappante de cette ressemblance consiste à comparer les valeurs propres des matrices de transfert des modèles, par exemple pour $Q = 3$. Elles sont données Table 4.1 pour une largeur $L = 2$. T_{spin} est la matrice de transfert du modèle de Potts dans la représentation en spins, et $T_{\text{spin}}^{\text{dual}}$ est définie par :

$$T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x) = x^{2L} T_{\text{spin}}(x^{-1}) , \quad (4.40)$$

de façon à ce que $x^B Z_{\text{Potts}}(x^{-1})$, quantité différente de $Z_{\text{Potts}}(x)$ uniquement à cause des diagrammes dégénérés, soit donné simplement par $\text{Tr} \left[T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x)^N \right]$, car le nombre total de liens directs du réseau carré est $B = 2LN$. Notons qu'il s'agit bien d'une transformation de dualité, car le réseau carré avec CL toroïdales étant autodual, il suffit juste de changer x en x^{-1} .

On remarque immédiatement qu'il y a de nombreuses valeurs propres qui coïncident, et l'objectif de cette sous-section est d'expliquer pourquoi. Considérons d'abord les modèles non twistés. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, seule la valeur propre dominante de la matrice de transfert donne la dépendance en N de la fonction de partition. Ainsi, on peut écrire que $Z_{\text{RSOS}} \sim \Lambda_r^N$ et $Z_{\text{Potts}} \sim \Lambda_s^N$, Λ_r et Λ_s étant respectivement les valeurs propres dominantes de T_{RSOS} et T_{spin} . Comparons Z_{Potts} et Z_{RSOS} dans cette géométrie, en supposant x positif, de façon à ce que les arguments standards de probabilité s'appliquent. Les configurations typiques d'amas sont telles que le diagramme de Pasquier ait un ordre $n \rightarrow \infty$, puisque comme $N \geq L$, les amas ont tendance à percoler selon la direction verticale. Par conséquent, l'expression de w_c se simplifie, car seule sa valeur propre dominante \sqrt{Q} importe, voir Eq. (4.20) : $w_c \sim \sqrt{Q}^n$, et donc les boucles non triviales ont aussi un poids \sqrt{Q} , comme dans le cas du modèle de Potts : $Z_{\text{Potts}} \sim Z_{\text{RSOS}}$ dans la limite $N \rightarrow \infty$. On en déduit que les valeurs propres dominantes Λ_r et Λ_s des deux modèles sont identiques. De plus, cette valeur propre est présente à la fois dans

Transfer matrix :	$T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$		$T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$		T_{spin}			$T_{\text{spin}}^{\text{dual}}$		
Twist :	I	Z_2	I	Z_2	I	Z_2	Z_3	I	Z_2	Z_3
-4.547135105405	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
-4.536300662409	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
-4.530748290953	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1
-3.512711596812	0	0	1	1	0	0	1	2	0	0
-3.502223380184	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
-3.441474985184	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
-3.397645107750	0	2	0	2	0	2	0	0	2	0
-3.348639214318	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
-3.292754029664	1	0	2	1	0	1	1	2	1	0
-2.335814864962	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
-2.307465012288	2	1	1	0	2	1	0	0	1	1
-2.285900912958	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
-2.251579827634	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
-2.236228400659	0	0	1	1	0	0	1	2	0	0
-2.203480723895	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1
-2.202573934202	0	2	0	2	0	2	0	0	2	0
-2.158744056768	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0

TAB. 4.1 – Spectre des matrices de transfert des différents modèles considérés pour $Q = 3$, soumis à des CL transverses periodiques (I) ou twistées (Z_2 et Z_3). La première colonne donne les énergies libres $\beta f_i = -L^{-1} \log(\Lambda_i)$, pour une largeur $L = 2$ et une température $x = 5$. Les colonnes suivantes donnent les multiplicités de chaque f_i . Une multiplicité égale à 0 veut dire que Λ_i n'est pas une valeur propre de la matrice de transfert considérée. La somme des multiplicités dans une colonne donnée est égale à la dimension de la matrice de transfert correspondante.

les secteurs pair et impair du modèle RSOS, car $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ et $Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ ne diffèrent qu'à cause des diagrammes dégénérés, qui ont une probabilité nulle dans la géométrie considérée. On peut ainsi écrire que :

$$Z_{\text{RSOS}} \simeq 2Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} \simeq 2Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}} . \quad (4.41)$$

En effet, les valeurs propres maximale et minimale dans l'Eq. (4.20) diffèrent juste par un signe (ce qui n'a pas de conséquence vu que n est pair) et donc plus précisément $w_c \simeq 2\sqrt{Q}^n$. De même, les valeurs propres dominantes de T_{spin} et $T_{\text{spin}}^{\text{dual}}$ sont identiques, les diagrammes dégénérés ne contribuant pas pour $N \rightarrow \infty$.

Non seulement il y a égalité entre les valeurs propres dominantes de ces quatre matrices de transfert, mais aussi entre de nombreuses valeurs propres sous-dominantes, parfois avec des multiplicités différentes. Cela est une conséquence des relations entre fonctions de partition établies précédemment. Considérons par exemple l'Eq. (4.27). Les fonctions de partition, étant données par des traces de matrices de transfert (on ne considère pas ici la matrice de transfert dans la représentation en amas), s'écrivent sous la forme :

$$Z(x) = \sum_i \alpha_i (\Lambda_i(x))^N , \quad (4.42)$$

où pour une largeur L donnée, les $\Lambda_i(x)$ sont les valeurs propres de la matrice de transfert correspondante et les α_i leurs multiplicités. L'Eq. (4.27), étant valable pour tout N , impose des contraintes sur les multiplicités. Ainsi, pour toute valeur propre, on doit avoir :

$$(Q-1)(\alpha_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - \alpha_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}) = \alpha_{\text{spin}} - \alpha_{\text{spin}}^{\text{dual}} . \quad (4.43)$$

Par exemple, si $\alpha_{\text{RSOS}}^{\text{even}} > \alpha_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$, on en déduit que la valeur propre apparaît au moins dans le spectre de $T_{\text{spin}}(x)$, et peut-être aussi dans celui de $T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x)$ avec une multiplicité moindre. Le fait que certaines valeurs propres puissent avoir même multiplicité dans les secteurs pair et impair, i.e. $\alpha_{\text{RSOS}}^{\text{even}} = \alpha_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$, explique pourquoi les spectres des modèles RSOS et de Potts ne sont pas exactement identiques.

Considérons maintenant les coïncidences de valeurs propres entre les modèles RSOS twistés et non twistés. Nous allons expliquer pourquoi dans chaque secteur, pair ou impair, la valeur propre dominante de $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}$ est une valeur propre sous-dominante de T_{RSOS} . Les configurations contribuant à $Z_{\text{RSOS}}^{Z_2}$ sont celles où les amas non triviaux ont i_2 pair, ce qui inclut en particulier le cas dégénéré. Dans la limite $L \ll N$, les configurations typiques sont ces configurations dégénérées, avec un amas non trivial direct dans le secteur pair et dual dans le secteur impair, voir Eq. (4.34). A cause de ces effets de parité, la valeur propre dominante du modèle twisté n'est pas la même dans les deux secteurs, sauf bien sûr pour $x = 1$ puisqu'alors $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}$ et $T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}$ sont identiques. En utilisant l'Eq. (4.35), et comme les valeurs propres dominantes ne s'annulent pas à droite, pour x générique, on en déduit qu'elles sont aussi présentes à gauche, et donc dans le spectre du modèle RSOS, la valeur propre dominante du secteur pair twisté coïncidant avec une valeur propre sous-dominante du secteur pair non twisté et de même pour les secteurs impairs, si $\frac{p}{2}$ est impair, ou bien si $\frac{p}{2}$ est pair, ce sont des secteurs de parités opposées qui sont en correspondance (cf. le facteur $(-1)^{\frac{p}{2}+1}$ de l'Eq. (4.35)). La raison pour laquelle ces valeurs propres sont sous-dominantes dans les secteurs non twistés est que les configurations dominantes pour $N \rightarrow \infty$ sont comme nous l'avons vu celles avec un grand nombre d'amas percolant verticalement, les configurations dégénérées étant sous-dominantes.

Pour finir, considérons le cas très particulier du modèle d'Ising ($Q = 2$), pour lequel il y a des égalités exactes entre matrices de transfert. Par exemple, dans $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$, les hauteurs directes sont fixées à 2, tandis que les hauteurs duales peuvent prendre des valeurs égales à 1 ou 3. Les hauteurs duales définissent donc bijectivement des variables de spin d'Ising $\sigma_i = 1$ ou 2 sur le réseau dual. De plus, les poids des plaquettes correspondent exactement aux poids d'un modèle d'Ising sur le réseau dual à la température x . Le réseau carré étant autodual, on en déduit que :

$$T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = T_{\text{spin}}(x) , \quad (4.44)$$

et en raisonnant de manière analogue que :

$$T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x) . \quad (4.45)$$

Le twist Z_2 du modèle RSOS étant en correspondance avec le twist Z_2 du modèle d'Ising (CL transverses antipériodiques sur les spins), on a également des relations entre modèles twistés :

$$T_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) = T_{\text{spin}}^{Z_2}(x), \quad T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}(x) = T_{\text{spin}}^{\text{dual}, Z_2}(x) . \quad (4.46)$$

4.2.6 Limite continue

Pour $x = 1$, on peut déterminer quels sont les opérateurs des théories en diagonalisant les matrices de transfert pour différentes valeurs de L . Considérons le cas $Q = 3$. T_{RSOS} correspond au modèle minimal $M_{6,5}$ (secteurs holomorphe et antiholomorphe couplés trivialement), tandis que T_{spin} pour $Q = 3$ correspond à un couplage non trivial, comme expliqué au chapitre 2, et en particulier les dimensions forment un sous-ensemble de la table de Kac du modèle minimal.

Lorsqu'on réalise le twist Z_2 sur le modèle RSOS, défini seulement pour p pair, l'opérateur de désordre correspondant est $\phi_{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}}$, de dimension conforme $h_{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}} = \frac{p^2-4}{16p(p-1)}$. En effet, dans la limite $N \rightarrow \infty$, $\frac{Z_{\text{RSOS}}^{Z_2}}{Z_{\text{RSOS}}}$ est proportionnel à la probabilité d'avoir un amas percolant dans la direction horizontale, et donc à la fonction de corrélation des spins (dans le modèle de Potts) ou des hauteurs (dans le modèle RSOS). En utilisant les résultats du chapitre 2, on en déduit que l'opérateur de désordre est $\phi_{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}}$.

Pour $Q = 3$ ($p = 6$), nous avons également étudié le modèle de Potts twisté, de type Z_2 ou Z_3 . Nous avons trouvé que les twists Z_2 et Z_3 correspondent respectivement à $\phi_{2,2}$ de dimension holomorphe $h_{2,2} = \frac{1}{40}$ et $\phi_{4,4}$ de dimension $h_{4,4} = \frac{1}{8}$. Notons que ces opérateurs ne sont pas présents dans le modèle de Potts à trois états, mais ce n'est pas gênant puisque les opérateurs de désordre sont des opérateurs non locaux.

4.3 Modèle RSOS avec CL fixées

4.3.1 Fonction de partition

Le cas où les CL transverses sont fixées a été étudié par Saleur et Bauer [18], et nous exposons ici leurs travaux. Supposons que les hauteurs valent a d'un côté et c de l'autre ($c-a$ est forcément pair car il y a $2L$ hauteurs pour un temps donné), et que les CL longitudinales restent périodiques. Exprimons la fonction de partition $Z_{a,c}$ correspondante. Comme la géométrie est cyclique, il n'y a cette fois qu'un seul type d'amas non trivial, à savoir les amas percolant

horizontalement. De plus, la structure des diagrammes de Pasquier est changée, le cycle des amas non triviaux n'étant plus fermé, mais ouvert. Cependant, on peut faire les mêmes types de raisonnement que dans la section précédente. Pour une configuration d'amas donnée, les boucles triviales ont toujours un poids \sqrt{Q} , tandis que le poids w_c correspondant aux amas non triviaux, supposé en nombre $n + 1$ (de manière à avoir n boucles), est égal au nombre de chemins de n pas allant de a à c sur le diagramme de Dynkin A_{p-1} . w_c est donc égal à :

$$w_c = \langle c | G_{p-1}^n | a \rangle = \sum_{k=1}^{p-1} S_c^{(k)} S_a^{(k)} (\lambda_k)^n. \quad (4.47)$$

Il est particulièrement instructif d'exprimer $Z_{a,c}$ en fonction des $K_{1,1+2l}$ introduits chapitre 3. Pour cela, on se rappelle que chaque boucle non contractible peut être orientée et va contribuer au spin S_z . Ainsi, en notant $\epsilon_i = \pm 1$ l'orientation de chaque boucle, on a $S_z = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i}{2}$. On utilise un raisonnement analogue au cas du modèle de Potts avec CL cycliques discuté au chapitre 3. Pour donner le poids de l'Eq. (4.47) aux boucles non triviales, on écrit que :

$$\sum_{\epsilon_i} \cos \left(\frac{\pi k}{p} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \right) = (\lambda_k)^n, \quad (4.48)$$

et donc $Z_{a,c}$ s'exprime comme :

$$Z_{a,c} = \sum_{k=1}^{p-1} S_c^{(k)} S_a^{(k)} \sum_{m=-L}^L \cos \left(\frac{2\pi m k}{p} \right) \sum_{l \geq m} K_{1,2l+1}, \quad (4.49)$$

l et m correspondant respectivement aux valeurs de S et S_z . L'Eq. (4.49), après réorganisation des termes de façon à avoir la somme sur l avant celle sur m , donne :

$$Z_{a,c} = \sum_{k=1}^{p-1} S_c^{(k)} S_a^{(k)} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} N_l^{(k)} \chi_{1,2l+1}, \quad (4.50)$$

où les coefficients $N_l^{(k)}$ valent :

$$N_l^{(k)} = \sum_{m=-l}^l \cos \left(\frac{2\pi m k}{p} \right) \quad (4.51)$$

et où les $\chi_{1,2l+1}$ sont définis comme :

$$\chi_{1,2l+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K_{1,2(np+l)+1} - K_{1,2((n+1)p-1-l)+1}) \quad (4.52)$$

$K_{1,2l+1}$ étant nul lorsque $l > L$.

Notons que l'expression de $Z_{a,c}$ donnée dans l'Eq. (4.50) peut se mettre sous la forme $\sum_l N_l^{a,c} \chi_{1,2l+1}$, où les $N_l^{a,c}$ sont des entiers, qui est une généralisation de l'Eq. (2.43) pour un réseau discret et à une température quelconque. En particulier, si a vaut 1, alors Saleur et Bauer ont montré que $Z_{1,c}$ vaut simplement $\chi_{1,2l+1}$, avec $c = 2l + 1$. Nous verrons dans le prochain chapitre que les décompositions en $K_{1,2l+1}$ du modèle de Potts, exposées dans le chapitre 3, se recombinaient à p entier en décompositions en χ_{2l+1} . Le résultat précédent nous permet de calculer simplement ces quantités.

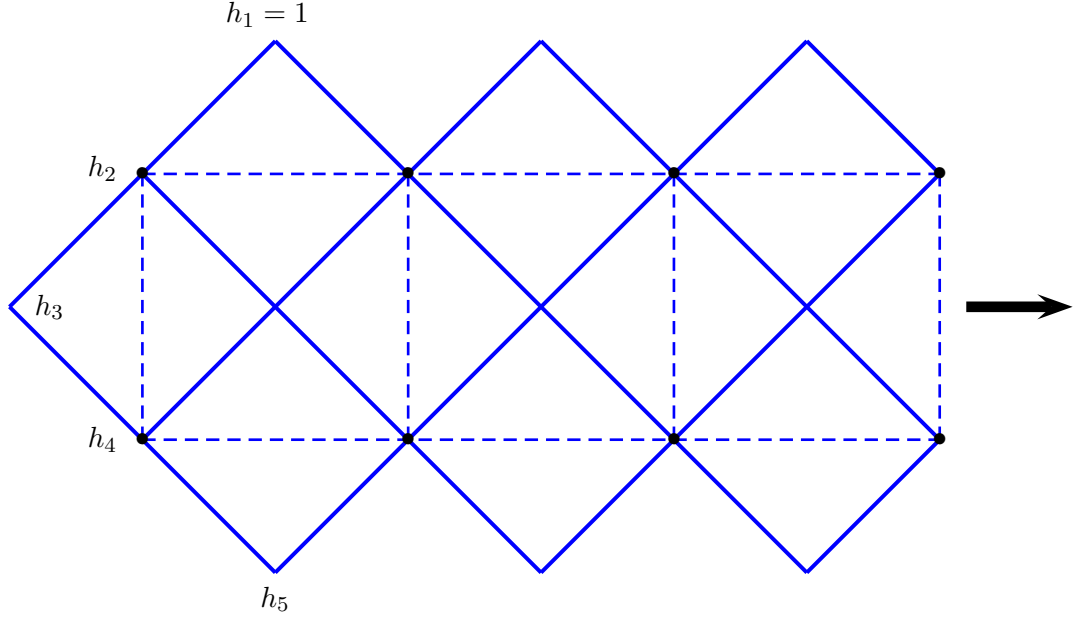


FIG. 4.4 – Réseau RSOS (lignes pleines) et conventions de numérotation pour les hauteurs pour un réseau carré de largeur $L = 2$ (en pointillés). La flèche indique la direction de propagation de la matrice de transfert.

4.3.2 Calcul des $\chi_{1,2l+1}$

Nous détaillons ici la manière de calculer numériquement les $\chi_{1,2l+1}(p, L, N, x)$ pour des valeurs données de p entier, de la largeur L , de la longueur N et de la température x . D'après le résultat de la sous-section précédente, on a :

$$\chi_{1,2l+1}(p, L, N, x) = \text{Tr} [T_{1,2l+1}(p, L, x)^N] , \quad (4.53)$$

où $T_{1,2l+1}(p, L, x)$ est la matrice de transfert du modèle RSOS A_{p-1} , pour une largeur L et une température x , avec les hauteurs fixées de chaque côté à 1 et $2l+1$. Il faut bien noter qu'il s'agit d'une trace standard, les CL longitudinales étant périodiques. $T_{1,2l+1}$ agit sur l'espace engendré par les vecteurs $|h_1, h_2, \dots, h_{2L+1}\rangle$, avec h_1 et h_{2L+1} fixées respectivement à 1 et $2l+1$. Pour déterminer sa dimension, il suffit donc de dénombrer le nombre de marches aléatoires de $2L$ pas sur A_{p-1} commençant par 1 et finissant à $2l+1$. En raisonnant avec les valeurs propres de G_{p-1} , on trouve une expression analogue à l'Eq (4.47) en remplaçant n par $2L$. Une autre méthode, que nous avons donnée dans l'appendice de [22], consiste à dénombrer directement ces marches. Nous verrons dans le chapitre suivant une méthode algébrique permettant de déterminer de façon simple cette dimension. Asymptotiquement, d'après l'Eq (4.47), elle est d'ordre Q^L . Effectivement, les $T_{1,2l+1}$ nous permettront de calculer la fonction de partition du modèle de Potts à p entier avec des CL cycliques. Les conventions choisies sont représentées dans les Fig. (4.4) et (4.5).

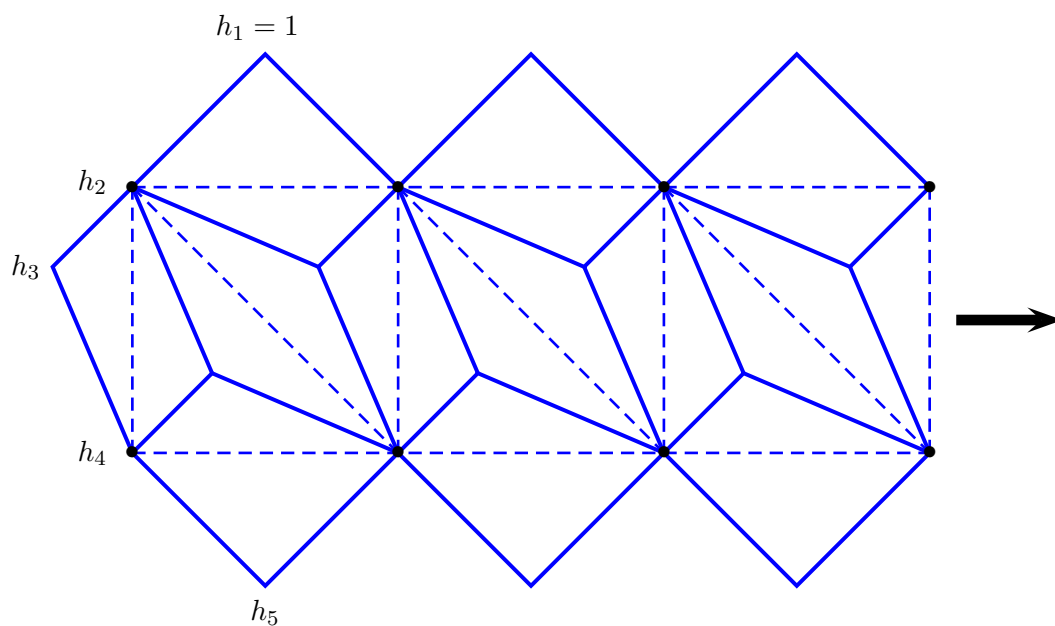


FIG. 4.5 – Réseau RSOS (lignes pleines) et conventions de numérotation pour les hauteurs pour un réseau triangulaire de largeur $L = 2$ (en pointillés). La flèche indique la direction de propagation de la matrice de transfert.

Chapitre 5

Modèle de Potts pour Q nombre de Beraha

Nous considérons maintenant à proprement parler le modèle de Potts, avec des CL cycliques, lorsque le nombre d'états Q vaut un nombre de Beraha $B_p = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right)$. Les développements en $K_{1,2l+1}$ obtenus chapitre 3 se recombinaient alors en développements en $\chi_{1,2l+1}$, fonctions de partition du modèle RSOS avec des conditions aux limites cycliques/fixées, comme l'ont montré Pasquier et Saleur dans [16]. Ainsi, de nombreuses valeurs propres de la matrice de transfert dans la représentation en amas ont une amplitude nulle ou s'annulent par paires à cause d'amplitudes opposées, et ne vont donc plus intervenir dans la fonction de partition du modèle. Ils en ont donné une interprétation algébrique à l'aide de la théorie de représentation du groupe quantique $U_q(sl(2))$, pour q racine de l'unité, que nous exposons dans la sous-section 5.1.2. De manière remarquable, lorsque x est situé dans la phase de Berker-Kadanoff, la valeur propre dominante dans la représentation en amas, ainsi que toutes les valeurs propres ayant le même comportement d'échelle, s'annulent, comme l'a discuté Saleur dans [93] et [17]. Ainsi, l'énergie libre f du système est modifiée : $f(p, x)$, pour x dans la phase de BK, a des singularités lorsque p prend des valeurs entières. Le calcul de l'énergie libre à p entier dans la région antiferromagnétique a été fait récemment par Jacobsen et Saleur [92].

Cela entraîne que le comportement critique du modèle de Potts peut être modifié lorsque p est entier, et a motivé notre étude du diagramme de phase du modèle de Potts dans le plan des températures x complexes, que nous avons publiée dans [22]. Les questions posées étaient les suivantes :

1. Le diagramme de phase étant modifié, x_{BK} reste-t-il un point fixe ? Et si oui, quelles sont ses propriétés ?
2. Dans le diagramme de phase générique, la ligne chromatique $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$ ne joue pas de rôle particulier pour un réseau carré, mais est une ligne intégrable pour un réseau triangulaire, comme l'a montré Baxter [94],[95]. $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$ joue-t-il un rôle particulier pour p entier ? En particulier, on sait que pour un réseau triangulaire et $Q = 2$ ($p = 4$), il correspond à un point critique de charge centrale 1, la limite continue étant celle d'un champ gaussien libre [96],[60],[59]. Pour $Q = 3$ ($p = 6$), il correspond à un point non critique, la fonction de partition Z étant triviale et égale à 3 (le réseau triangulaire est tricoloriable). Pour $Q = 4$ ($p = \infty$), il correspond à un point critique de charge centrale 2 [99],[100]. Qu'en

est-il pour une valeur entière quelconque de p ?

3. Pour p entier, on s'attend à ce que la structure du diagramme de phase dépende du réseau, contrairement à l'universalité observée pour Q générique. Par exemple, pour un réseau carré, $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$ correspond pour $Q = 2$ à un point non critique (Z valant simplement 2), et pour $Q = 3$ à un point critique de charge centrale 1 par équivalence avec un modèle à six vertex critique [97],[98]. De plus, le diagramme peut dépendre des CL, c'est pourquoi nous avons considéré dans [22] des CL cycliques et des CL cycliques/fixées.
4. Une étude numérique de la charge centrale, effectuée par Jacobsen et Saleur dans [92], a montré la présence de nouveaux points critiques dans la phase de BK. Il se pose donc la question de savoir où sont situés ces points.

Nous exposons notre étude dans la section 5.2. Nous commençons par présenter dans la sous-section 5.2.1 un historique sur l'étude des zéros de la fonction de partition dans le plan des températures complexes, afin de rappeler les principales études qui ont déjà été faites. L'idée de travailler dans le plan complexe a été émise par Lee et Yang en 1952, qui ont considéré le modèle d'Ising en présence d'un champ magnétique complexe. Fisher a ensuite étendu en 1964 cette idée [70], en étudiant les zéros de la fonction de partition du modèle d'Ising sans champ dans le plan des températures complexes. Il a montré que les points d'intersection des lignes d'accumulation des zéros de Z dans la limite de grande taille avec l'axe réel correspondaient aux points critiques du modèle. Depuis, de nombreuses autres études des zéros de fonctions de partition du modèle d'Ising et plus généralement du modèle de Potts ont été effectuées, notamment par Chang et Shrock [87],[88],[89],[90]. Cependant, à notre connaissance, aucune étude aussi complète que celle que nous avons publiée dans [22] n'a été réalisée, car nous avons considéré des largeurs L allant jusqu'à 12 et des longueurs infinies (le théorème de Beraha-Kahane-Weiss donnant la manière d'obtenir les points d'accumulation des zéros pour une largeur fixée et une longueur tendant vers l'infini), ainsi que des valeurs de p allant jusqu'à 10 (et également le cas où $p = \infty$ qui correspond à $Q = 4$). La procédure utilisée est exposée dans la sous-section 5.2.2. Nous donnons par souci pédagogique nos résultats pour le modèle d'Ising défini sur un réseau carré avec des CL cycliques dans la sous-section 5.2.3, que nous généralisons à une valeur entière quelconque de p dans la sous-section 5.2.4. Nous donnons nos résultats pour un réseau triangulaire dans la sous-section 5.2.5. Nous étudions le cas des CL cycliques/fixées (pour un réseau carré ou triangulaire) dans la sous-section 5.2.6. Nous finissons par donner dans la sous-section 5.2.7 un récapitulatif des résultats nouveaux obtenus.

5.1 Décomposition de Z en caractères

5.1.1 Recombinaison à p entier

Nous partons de l'Eq. (3.19), $Z = \sum_l c^{(l)} K_{1,2l+1}$, démontrée dans le chapitre 3 pour une valeur du nombre d'états Q générale (i.e. pour p non entier). Cette équation est aussi forcément valable à p entier par prolongement analytique, car pour N et L finis la fonction de partition Z étant polynomiale en Q elle ne présente pas de singularités en Q . C'est uniquement en prenant la limite thermodynamique que des singularités à p entier apparaissent comme nous le verrons. D'ailleurs, le raisonnement combinatoire exposé chapitre 3 peut se transposer tel quel à p entier. Ce n'est pas le cas de la méthode algébrique, comme nous le montrerons dans la sous-section suivante.

Pour p entier, il y a des égalités au signe près entre des coefficients $c^{(l)} = (2l+1)_q$ du développement. En effet, on a, pour tout entier n :

$$c^{((n+1)p-1-l)} = -c^{(l)} \text{ et } c^{(np+l)} = c^{(l)} . \quad (5.1)$$

Par conséquent, après factorisation, l'Eq. (3.19) se réécrit :

$$Z = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2}-1 \rfloor} c^{(l)} \chi_{1,2l+1} , \quad (5.2)$$

où les $\chi_{1,2l+1}$ valent :

$$\chi_{1,2l+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K_{1,2(np+l)+1} - K_{1,2((n+1)p-1-l)+1}) , \quad (5.3)$$

la somme étant en fait finie pour L fini, car les $K_{1,2l+1}$ sont nuls pour $l > L$. Les $\chi_{1,2l+1}$ sont donc exactement ceux de l'Eq. (4.52), et sont donc des fonctions de partition du modèle RSOS A_{p-1} , quantités dont le calcul a été exposé sous-section 4.3.2.

Il est important de comprendre en quoi le développement en $\chi_{1,2l+1}$, donné dans l'Eq. (5.2), est beaucoup plus simple que celui en $K_{1,2l+1}$, donné dans l'Eq. (3.19). La somme sur l va de 0 à $\lfloor \frac{p}{2}-1 \rfloor$ au lieu d'aller de 0 à L , et donc contient moins de termes. En particulier, lorsque la largeur L tend vers l'infini, l'Eq. (3.19) contient un nombre infini de termes, tandis que l'Eq. (5.2) en contient un nombre fini. De plus, les termes de la somme sont plus simples dans l'Eq. (5.2). En effet, nous avons vu dans la sous-section 3.1.1 que $K_{1,2l+1}$ correspond à un nombre de ponts fixé à l , et donc contient $n(L, l)$ valeurs propres, $n(L, l)$ ayant été donné par l'Eq. (3.8) et croissant comme 4^L pour $L \rightarrow \infty$ et l fixé. $\chi_{1,2l+1}$ contient $\dim(T_{1,2l+1})$ valeurs propres, voir dans la sous-section 4.3.2, se comportant asymptotiquement comme Q^L . $\chi_{1,2l+1}$ contient donc beaucoup moins de valeurs propres que $K_{1,2l+1}$, ce qui implique qu'il y a des annulations de valeurs propres dans l'Eq. (3.19), et donc des coïncidences de valeurs propres entre différents K_l . Ce fait s'interprète simplement avec le groupe quantique $U_q(sl(2))$, et explique pourquoi le diagramme de phase du modèle de Potts à un nombre de Beraha est différent du cas générique étudié chapitre 3. En effet, si les valeurs propres s'annulant sont des valeurs propres dominantes, alors le diagramme de phase est changé. Nous montrerons section 5.2 que c'est ce qui se produit dans la zone antiferromagnétique.

Par contre, tous les développements vus chapitre 3 ne se recombinent pas forcément à p entier, pour faire apparaître les $\chi_{1,2l+1}$, car la symétrie sous $U_q(sl(2))$ n'est présente qu'avec des CL transverses libres. Ainsi, les développements donnés par l'Eq. (3.16) des Z_{2j+1} , fonctions de partition restreintes à j ponts, ne se recombinent en général pas. Le cas où p est pair et $j = 0$ (amas non triviaux interdits) est une exception, l'Eq. (3.18) donnant :

$$Z_1 = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2}-1 \rfloor} (-1)^l \chi_{1,2l+1} . \quad (5.4)$$

Nous avons donc encore un exemple d'effet de parité de p , ces effets ayant été expliqués chapitre 4 en considérant les poids des cycles dégénérés. De la même façon, l'Eq. (3.23), correspondant au développement de Z_{D,Q_0} , devient pour p pair :

$$\frac{Q^{2-S_D} v^B}{Q_0} Z_{D,Q_0}(v_D) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2}-1 \rfloor} b^{(l)} \chi_{1,2l+1}(v) \quad (5.5)$$

car, d'après l'Eq. (3.24, pour p pair on a :

$$b^{(l)} = -b^{(p-1+np-l)} = b^{(np+l)} . \quad (5.6)$$

En particulier, dans le cas de CL cycliques/fixées ($Q_0 = 1$), Z_{++} s'écrit pour p pair :

$$Z_{++}(L, N, v) = \frac{\exp(2NK)}{Q^{2-S_D v B}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2}-1 \rfloor} b^{(l)} \chi_{1,2l+1}(L-1, N, v_D) . \quad (5.7)$$

De plus, pour $Q_0 = 1$, on note que $b^{(1)}$ est nul, comme $b^{(1)} = Q_0 - 1$. Par conséquent, il n'y a pas de terme en $\chi_{1,3}$ dans la somme. Cela aura des conséquences lors de l'étude des zéros de Z_{++} .

5.1.2 Représentations de $U_q(sl(2))$ pour q racine de l'unité

Pasquier et Saleur ont dans [16] interprété la recombinaison donnant l'Eq. (5.2) en étudiant les représentations de $U_q(sl(2))$ pour q racine de l'unité. Lorsque p est entier, et donc $q = \exp(i\frac{\pi}{p})$ est racine de l'unité, certaines représentations de $U_q(sl(2))$ ont une structure différente de celles de $U(sl(2))$. En effet, l'opérateur de Casimir des irreps génériques (i.e. pour p non entier) de $U_q(sl(2))$ est :

$$S^2 = \left(\left(l + \frac{1}{2} \right)_q \right)^2 - \left(\left(\frac{1}{2} \right)_q \right)^2 . \quad (5.8)$$

Pour p entier, l'opérateur de Casimir prend des valeurs identiques pour des irreps génériques reliées par les transformations :

$$l' = l + np, \quad l' = p - 1 - l + np . \quad (5.9)$$

Par conséquent, les irreps génériques peuvent être couplées. Une étude approfondie [16] montre que deux irreps génériques de spins l et l' avec

$$l' = -1 - l \bmod p \quad \text{et} \quad 0 \leq l' - l \leq p - 1 \quad (5.10)$$

peuvent se coupler pour donner une représentation plus large, indécomposable mais réductible, appelée représentation de type I, et que ce couplage se fait de façon maximale, dans un sens que nous exposons maintenant. Pour un l donné tel que $0 < l < \frac{p-1}{2}$, on a une série $0 \leq l < l_1 = p - 1 - l < l_2 = l + p < \dots < l_k \leq L$ tels que les couples (l_i, l_{i+1}) satisfont l'Eq. (5.10). Toutes les $n(L, l_k)$ irreps de spin l_k se couplent avec $n(L, l_k)$ irreps de spin l_{k-1} . Les $n(L, l_{k-1}) - n(L, l_k)$ irreps de spin l_{k-1} restantes se couplent avec $n(L, l_{k-1}) - n(L, l_k)$ irreps de spin l_{k-2} . En itérant le raisonnement, on en déduit que toutes les irreps sont couplées, à l'exception de $d_l^{(p)}$ irreps de spin l , $d_l^{(p)}$ étant donné par :

$$d_l^{(p)} = n(L, l) - n(L, l_1) + n(L, l_2) + \dots + (-1)^k n(L, l_k) \quad (5.11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n(L, np + l) - n(L, (n+1)p - 1 - l)) , \quad (5.12)$$

où comme d'habitude la somme est en fait finie, car on a posé $n(L, l) = 0$ pour $l > L$. Ces irreps non couplées, appelées représentations de type II, ont, comme expliqué dans le chapitre

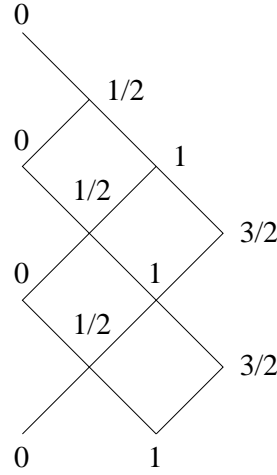


FIG. 5.1 – Diagramme de Bratteli pour $p = 5$. Il s'agit du diagramme représenté Fig. (3.6) mais avec les valeurs de l supérieures à $\frac{3}{2}$ tronquées.

3, la même structure que celles de $U(sl(2))$, et ont une q -dimension égale à $\text{Tr}[q^{2S_z}] = (2l+1)_q$. Au contraire, les représentations de type I sont caractérisées par une q -dimension nulle. C'est pour cette raison que par convention dans le cas où l vaut $\frac{p-1}{2}$, bien que les irreps ne soient pas couplées, l étant invariant sous les transformations de l'Eq. (5.10), on les appelle représentations de type I, car elles ont une q -dimension nulle.

Pour obtenir algébriquement le développement de Z donné par l'Eq. (5.2), on utilise l'Eq. (3.42), à savoir $Z = \text{Tr} [q^{2S_z} T_{6V}^N]$. Comme les représentations de type I ont une q -dimension nulle, seules les représentations de type II contribuent. On définit $\chi_{1,2l+1}$ comme la trace de T_{6V}^N sur les vecteurs de plus haut poids $S = S_z = l$ des représentations de type II. On a :

$$\chi_{1,2l+1} = \sum_{n=0}^{\infty} [K_{1,2(np+l)+1} - K_{1,2((n+1)p-1-l)+1}] . \quad (5.13)$$

La définition des $\chi_{1,2l+1}$ est bien équivalente à celle utilisée précédemment, puisqu'on retrouve l'Eq. (4.52). Pour p entier, on a des structures de supermultiplets, car en plus des dégénérescences habituelles, on a des dégénérescences entre certaines valeurs propres de l différents. Ainsi, dans l'Eq. (4.52), les valeurs propres de T_{l_i} se divisent en deux catégories : celles se trouvant aussi dans $T_{l_{i-1}}$ et celles se trouvant aussi dans $T_{l_{i+1}}$. Au final, $\chi_{1,2l+1}$ contient uniquement les $d_l^{(p)}$ valeurs propres de T_l non contenues dans T_{l_1} . De manière analogue au cas de p générique, le nombre $d_l^{(p)}$ de représentations de type II, i.e. la dimension de la représentation d'indice l de l'algèbre de TL, peut être vu comme le nombre de chemins sur un diagramme de Bratteli, mais tronqué de façon à ce que $l < \frac{p}{2} - 1$. Un exemple est donné dans la Fig. (5.1) pour $p = 5$. Le développement des Z en fonction des $\chi_{1,2l+1}$ est celui de l'Eq. (5.2).

5.1.3 Limite continue

Il est instructif de considérer la limite continue du modèle au niveau du point critique ferromagnétique (correspondant pour un réseau carré à $x = \frac{\exp(K)-1}{\sqrt{Q}} = 1$), car on retrouve alors des résultats bien connus de théorie conforme. En effet, $\chi_{1,2l+1}$ correspond alors aux caractères

$\chi_{1,2l+1}$ du modèle minimal $M_{p,p-1}$. Ainsi, l'Eq. (4.52) donne dans cette limite l'équation de Rocha-Caridi (2.32).

Considérons le cas du modèle d'Ising ($p = 4$). L'Eq. (4.52), correspondant à des CL cycliques, devient dans la limite continue :

$$Z = \chi_{1,1} + \chi_{1,3} , \quad (5.14)$$

tandis que l'Eq. (5.7), correspondant à des CL cycliques/fixées, devient :

$$Z_{++} = \chi_{1,1} . \quad (5.15)$$

En effet, les différents facteurs disparaissent dans la limite continue, à cause des normalisations choisies pour les Z et les χ . Pour le modèle de Potts à trois états ($p = 6$), on obtient :

$$Z = \chi_{1,1} + 2\chi_{1,3} + \chi_{1,5} \quad (5.16)$$

et :

$$Z_{++} = \chi_{1,1} + \chi_{1,5} = \chi_{\text{Id}} , \quad (5.17)$$

χ_{Id} étant le caractère de l'identité par rapport à l'algèbre étendue W_3 [32]. Par conséquent, le groupe quantique $U_q(sl(2))$ permet de généraliser des résultats valables pour $x = 1$ dans la limite continue à n'importe quelle température et n'importe quelle taille du réseau.

Saleur, en utilisant les résultats donnés dans la sous-section 3.3.2 et le fait que les K_l sont des caractères génériques $K_{1,2l+1}$, a compris pourquoi les nombres de Beraha jouent un rôle particulier [17]. Au point ferromagnétique, les dimensions holomorphes h_l , données par l'Eq. (3.54), augmentent avec le nombre l de ponts, et ne sont jamais identiques. En particulier, la valeur propre dominante est dans le secteur à 0 pont, et correspond à l'opérateur Id de dimension $h_0 = 0$. Dans la zone ferromagnétique, on s'attend donc à ce que le diagramme de phase ne soit pas modifié pour les nombres de Beraha. Les dimensions à la transition de Berker-Kadanoff ont par contre un comportement différent. En particulier, certains h_l avec l non nul sont négatifs, le secteur dominant étant le secteur à $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ponts. Le résultat surprenant que l'Id n'est plus l'opérateur dominant est dû au fait que les poids dans la fonction de partition peuvent être négatifs, comme la transition de Berker-Kadanoff est située dans la zone $x < 0$. Pour p entier et pair, il y a donc des croisements de niveaux et des annulations possibles, ce qui a pour effet de modifier le diagramme de phase. L'interprétation dans le cas d'un nombre de Beraha B_p avec p impair est légèrement différente. En effet, il y a alors une seule valeur propre dominante située dans le secteur à $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ponts, mais son amplitude $(2 \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1)_q$ est nulle [56].

5.2 Diagramme de phase dans le plan des températures complexes

5.2.1 Historique

L'idée de considérer une variable complexe, alors que dans le modèle physique elle était réelle, vient de Lee et Yang [33]. Ils ont étudié les zéros de la fonction de partition du modèle d'Ising dans le plan d'un champ magnétique h complexe, et montré que dans la limite d'un système de taille infinie les zéros s'accumulent selon l'axe des h imaginaires. Lorsque le système

est paramagnétique (ce qui correspond à une température supérieure à la température critique ferromagnétique), les courbes d'accumulation ne coupent pas l'axe réel. Au contraire, lorsque le système est ferromagnétique (ce qui correspond à une température inférieure à la température critique), les courbes d'accumulation coupent l'axe réel, en $h = 0$. Cela traduit le fait que l'énergie libre d'un ferromagnétique est singulière en $h = 0$ (lorsque h varie).

Fisher a généralisé cette méthode au cas des températures complexes [70]. Fisher a ainsi observé que pour un modèle d'Ising (en champ nul) défini sur un réseau carré bidimensionnel les zéros de la fonction de partition s'accumulent sur deux cercles autoduaux :

$$|x + \sqrt{2}| = 1 \text{ et } |x| = 1, \quad (5.18)$$

à savoir les cercles de rayon 1 et de centres $-\sqrt{2}$ et 0. L'intersection de ces deux cercles avec l'axe des x réel donne les points où l'énergie libre est singulière en température, à savoir :

$$x_- = -\sqrt{2} - 1, \quad x_{BK} = -1, \quad x_+ = -\sqrt{2} + 1, \quad x_{FM} = 1, \quad (5.19)$$

en utilisant les mêmes notations que dans la sous-section 3.3.1. Notons que comme nous avons utilisé la variable x dans notre étude [22], nous donnons les résultats exprimés à l'aide de cette variable, même si des variables légèrement différentes ont été utilisées par d'autres.

De nombreuses autres études sur le modèle d'Ising dans le plan des températures complexes ont été effectuées depuis. Itzykson, Pearson et Zuber ont étudié dans [101] la distribution des zéros de la fonction de partition du modèle d'Ising et des modèles de jauge. Ils ont en particulier montré que non seulement les points d'intersection entre les courbes d'accumulation des zéros et l'axe réel sont intéressants, puisqu'ils donnent la position des points critiques, mais que les angles que font ces lignes avec l'axe réel le sont également, car ils sont reliés au comportement critique du système en ces points. Par exemple, en notant ϕ l'angle que fait la ligne de zéros dans le plan des températures complexes, α l'exposant critique de la chaleur spécifique, et $\frac{A_-}{A_+}$ le rapport des amplitudes liées à la chaleur spécifique, ils ont démontré que :

$$\tan [(2 - \alpha)\phi] = \frac{\cos(\pi\alpha) - \frac{A_-}{A_+}}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (5.20)$$

Marchesini et Shrock ont également étudié le comportement de la longueur de corrélation ξ et de la susceptibilité χ du modèle d'Ising dans le plan des températures complexes [102]. Ils ont montré que le lieu des x tels que $\text{Re}(\xi^{-1}) = 0$ est donné par les deux cercles de Fisher, i.e. correspondent exactement aux points d'accumulation des zéros de la fonction de partition. Par contre, $\text{Im}(\xi^{-1})$ est en général non nul sur ces cercles, ce qui se traduit par une décroissance algébrique des fonctions de corrélation mais avec un terme oscillant. Ce n'est qu'aux points critiques, ainsi qu'en des points s'en déduisant par une certaine symétrie [102], que (ξ^{-1}) est nul. Ils ont montré aussi que χ était fini partout sur les cercles excepté au niveau de ces points. Matveev et Shrock ont prolongé l'étude de la longueur de corrélation ξ et de la susceptibilité χ dans le plan complexe, pour des réseaux carrés [103], triangulaires [104] ou bien hexagonaux [105]. Ils ont également considéré le diagramme de phase dans le plan des températures complexes du modèle d'Ising défini sur des réseaux plus compliqués, par exemple le réseau de Kagomé [106]. Saarloos et Kurtze ont montré que les zéros de la fonction de partition peuvent s'accumuler non pas selon des courbes, mais dans des domaines du plan complexe [116], en prenant comme exemple le modèle d'Ising anisotrope. Une étude approfondie de la distribution des zéros de la fonction de partition du modèle d'Ising a été réalisée par Stephenson et des collaborateurs [107],[108],[109], pour des réseaux isotropes ou anisotropes.

Des études analogues ont été effectuées pour le modèle de Potts (avec Q quelconque). Maillard et Rammal ont, en utilisant un groupe de symétrie laissant invariant la fonction de partition du modèle, localisé les points critiques et étudié les zéros de la fonction de partition dans le plan des températures complexes [110], pour des modèles de Potts bidimensionnels et tridimensionnels. Ils ont aussi étudié le modèle de Potts sur un réseau en forme d'échiquier [111],[112]. La distribution des zéros de la fonction de partition du modèle de Potts à trois états a été considérée par Martin pour un réseau carré [115], et par Martin et Maillard pour un réseau triangulaire [113]. Matveev et Shrock ont étudié les singularités dans le plan complexe de la susceptibilité dans [114]. Chang et Shrock ont déterminé les zéros de la fonction de partition du modèle de Potts pour différents réseaux et différentes tailles [87],[88],[89],[90]. Certains résultats, que nous avons publiés dans [22] et que nous allons présenter dans la suite, constituent une généralisation des leurs, et lorsque ce sera le cas nous le signalerons.

5.2.2 Principe

Nous présentons maintenant nos travaux publiés dans [22]. Nous étudions les zéros de la fonction de partition Z du modèle de Potts avec des CL cycliques, dans le plan des températures x complexes. On s'attend à ce que, lorsque la taille du système tend vers l'infini, les intersections des zéros avec l'axe des x réels soient des points de transition de phase, correspondant à des singularités de l'énergie libre. Il y a trois types de points fixes : les points fixes critiques, i.e. avec une longueur de corrélation infinie, correspondant forcément à une singularité de l'énergie libre, les points fixes triviaux (i.e. non critiques) et avec une énergie libre singulière au niveau de ces points, et enfin les points fixes triviaux avec une énergie libre régulière (i.e. telle que toutes ses dérivées soient bien définies au niveau de ces points). La méthode des zéros de la fonction de partition permet donc de détecter uniquement les deux premiers types de points fixes. Cependant, les autres points sont simplement $x = 0$ et $x = \pm\infty$ et il suffira de les rajouter dans le diagramme de phase.

Pour faire tendre la taille du système vers l'infini, on procède en deux étapes. On fait tendre d'abord la longueur N vers l'infini, pour une largeur L fixée. On note \mathcal{B}_L l'ensemble de ces zéros limites. Ensuite, on fait tendre L vers l'infini, les intersections de \mathcal{B}_∞ avec l'axe réel donnant les points critiques.

La détermination des \mathcal{B}_L se fait en utilisant le théorème de Beraha-Kahane-Weiss [42], que nous exposons maintenant. Les fonctions de partition Z se mettent sous la forme :

$$Z = \sum_{k=1}^M \alpha_k(x) \lambda_k(x)^N, \quad (5.21)$$

où les α_k et λ_k sont des fonctions analytiques non identiquement nulles (les λ_k sont les M valeurs propres du modèle, et les α_k leurs amplitudes, pour une largeur L donnée). On suppose de plus une condition de non-dégénérescence : il n'existe pas de domaine non vide tels que deux λ_k soient proportionnels, avec une constante de proportionnalité de module un. Le théorème de Beraha-Kahane-Weiss dit que x appartient à \mathcal{B}_L si et seulement si on est dans un de ces deux cas de figure :

1. Il y a une seule valeur propre dominante λ_k en x , et son amplitude α_k est nulle en x .
2. Il y a plusieurs valeurs propres dominantes en x .

Le premier cas correspond à des points isolés, tandis que le deuxième correspond à des courbes, et éventuellement à des points isolés où tous les λ_k sont simultanément nuls. Nous ne démontrons pas ce théorème, mais notons qu'il est intuitif. En effet, on conçoit que pour les deux cas précédents Z soit beaucoup plus petite en x qu'au voisinage, car la valeur propre dominante a une amplitude nulle, ou bien peut se compenser avec une autre valeur propre dominante, et ce uniquement en x . Par conséquent, x est un point d'accumulation des zéros de Z lorsque $N \rightarrow \infty$.

Pour les CL cycliques, d'après l'Eq. (5.2), on est toujours dans le deuxième cas, car les amplitudes α_k sont constantes et strictement positives. Pour les CL fixées, d'après l'Eq. (5.7), on est dans la même situation, sauf que les valeurs propres correspondant à $\chi_{1,3}$ ont une amplitude identiquement nulle et ne doivent donc pas être prises en compte. Nous verrons que cela change énormément l'allure de \mathcal{B}_L . Notons que \mathcal{B}_L est indépendant des valeurs précises des amplitudes α_k , du moment qu'elles sont non nulles. En particulier, le fait que les amplitudes des valeurs propres correspondant au même $\chi_{1,2j+1}$ soient égales n'a pas de conséquence. De plus, pour p entier, il est bien nécessaire d'utiliser les Eq. (5.2) et (5.7) au lieu des Eq. (3.19) et (3.26), car comme il y a des égalités de valeurs propres (pour tout x) entre des $K_{1,2j+1}$ différents, la condition de non-dégénérescence ne serait pas vérifiée. Il s'agit donc de localiser les x pour lequel plusieurs valeurs propres dominantes coïncident, ces valeurs propres pouvant correspondre à un même $T_{1,2j+1}$ ou bien à des $T_{1,2j+1}$ différents. Pour cela, deux méthodes sont possibles. La première est directe et consiste à diagonaliser numériquement tous les $T_{1,2j+1}$. Du fait de sa lenteur, elle n'est utile que pour étudier dans le détail des petites régions du plan complexe. La seconde est la méthode de la résultante, pour laquelle il n'est pas nécessaire de connaître toutes les valeurs propres. Cette méthode est exposée en appendice.

Nous allons étudier le diagramme de phase du modèle de Potts à B_p états sur des réseaux carrés ou triangulaires, avec des CL cycliques ou cycliques/fixées. En effet, on s'attend à ce que les caractéristiques du diagramme de phase du modèle dépendent du réseau considéré. Par exemple, pour $Q = 2$, le modèle antiferromagnétique à température nulle ($x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$) est critique sur réseau triangulaire, de charge centrale 1, et non critique sur réseau carré, Z valant simplement 2 (voir sous-section 1.1.3). Au contraire, pour $Q = 3$, le modèle à $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$ est critique sur réseau carré, de charge centrale 1, et non critique sur réseau triangulaire, Z valant simplement 3. De plus, les CL peuvent avoir une influence importante dans la région antiferromagnétique, comme cela a été observé pour le modèle à six vertex. Nous verrons qu'effectivement la structure de \mathcal{B}_L change avec les CL.

5.2.3 Diagramme de phase du modèle d'Ising sur réseau carré avec des CL cycliques

Nous exposons dans le détail le cas du modèle d'Ising ($p = 4$), car c'est le modèle à B_p états non trivial le plus simple, mais il est représentatif de ces modèles. Considérons des CL cycliques. Pour $p = 4$, l'Eq. (5.2) s'écrit :

$$Z = \chi_{1,1} + \chi_{1,3}, \quad (5.22)$$

$\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$ étant respectivement égaux à $\text{Tr}[T_{1,1}^N]$ et $\text{Tr}[T_{1,3}^N]$. D'après l'Eq. (5.12), $T_{1,1}$ et $T_{1,3}$ sont toutes deux de dimension 2^{L-1} . Ces résultats sont indépendants du réseau considéré. Supposons maintenant le réseau carré. Les éléments de $T_{1,1}$ et $T_{1,3}$ sont $2^{\frac{N-1}{2}} x^n (x + \sqrt{2})^{2l-1-n}$,

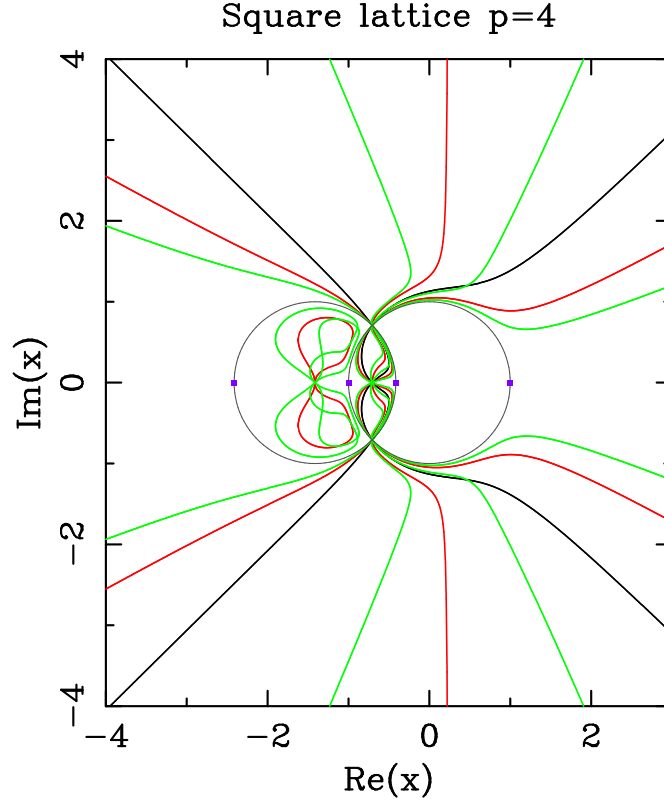


FIG. 5.2 – Courbes limites à $p = 4$, pour un réseau carré de largeur $L = 2$ (en noir), $L = 3$ (en rouge), et $L = 4$ (en vert). \mathcal{B}_2 avait déjà été obtenue Fig. 20 de [87], tandis que \mathcal{B}_3 avait déjà été obtenue Fig. 7 de [90]. On conjecture que les deux cercles de Fisher [70] représentés appartiennent à \mathcal{B}_∞ . Les carrés correspondent aux quatre points critiques pour Q génériques. On voit qu'il y a deux points critiques supplémentaires.

avec n le nombre de plaquettes où les deux hauteurs horizontales sont dans des états différents, compte tenu des états de départ et d'arrivée. Nous avons donné les expressions explicites des matrices pour des largeurs inférieures ou égales à 4 dans [22], et retrouvé l'expression des valeurs propres correspondantes, qui avait été déterminée précédemment par Chang et Shrock. Ainsi, les fonctions de partition pour des rubans de largeur 2 et 3 avaient été calculées respectivement dans [87] et [90], tandis que des résultats sur les matrices de transfert jusqu'à des largeurs 4 avaient été exposés dans [43]. Pour ces largeurs, les \mathcal{B}_L sont représentés Fig. (5.2). Les courbes correspondant à des largeurs de 2 et 3 avaient déjà été obtenues par Chang et Shrock respectivement Fig. 20 de [87] et Fig. 7 de [90], mais dans le plan des u complexes, u étant relié à x par $u = \frac{1}{\sqrt{Qx+1}}$. On conjecture ensuite des propriétés valables à tout L .

Tout d'abord, il y a des zéros limites dont la position est indépendante de L . Ainsi, les points $x = -1 + \exp(\pm i\frac{\pi}{2})$ appartiennent à \mathcal{B}_L . En ces points, toutes les valeurs propres sont équi-modulaires avec $|\lambda_k| = 1$. Il s'agit donc d'un point multiple, et on s'attend à avoir plusieurs branches se coupant en ces points. De la même façon, $x = -\sqrt{2}$ est un point multiple où tous les λ_k s'annulent, et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ à un point multiple où les secteurs $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$ sont équi-modulaires. Pour déterminer le nombre de branches se coupant en ces points ainsi que leurs angles, il suffit de développer les $\lambda_k(x)$ au voisinage de ces points. Nous détaillons le cas de $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'étude

des autres points étant faite dans [22]. En posant $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ avec $|\epsilon| \ll 1$, dans chaque secteur il n'y a qu'une seule valeur propre dominante $\lambda_{d,2j+1} \sim O(1)$. De plus, la différence entre ces deux valeurs propres dominantes est seulement d'ordre ϵ^L . Ainsi :

$$\lambda_{d,1} = 2^{-\frac{L}{2}} + O(\epsilon^3) \quad (5.23)$$

$$\lambda_{d,1} - \lambda_{d,3} = 2\epsilon^L + O(\epsilon^{L+1}) . \quad (5.24)$$

Les branches correspondent à l'équimodularité de ces deux valeurs propres :

$$|\lambda_{d,1}| = |\lambda_{d,3}| = |\lambda_{d,1} - 2\epsilon^L + O(\epsilon^{L+1})| . \quad (5.25)$$

Pour $|\epsilon| \ll 1$, cette condition d'équimodularité implique que :

$$\text{Re}(\epsilon^L) = 0 , \quad (5.26)$$

et donc les arguments correspondants θ_n de ϵ sont donnés par :

$$\theta_n = \frac{\pi}{2L}(2n-1) \text{ avec } n = 1, 2, \dots, 2L . \quad (5.27)$$

Il y a donc $2L$ branches s'intersectant en $-\sqrt{2}$ et faisant des angles θ_n avec l'axe des abscisses. Par un raisonnement analogue, on montre qu'il y a $2(L-2)$ branches se coupant en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'angles :

$$\theta_n = \frac{\pi}{2(L-2)}(2n-1) \text{ avec } n = 1, 2, \dots, 2(L-2) . \quad (5.28)$$

En plus de ces zéros, on s'attend à ce que les quatre points critiques du modèle de Potts à Q générique soient aussi des points fixes ! En effet, on conjecture que les cercles de rayon 1 et de centres 0 et $-\sqrt{2}$ appartiennent à \mathcal{B}_∞ , en accord avec les résultats de Fisher [70], voir l'Eq. (5.18). Ces cercles coupent l'axe des abscisses en quatre points, à savoir $x_- = -1 - \sqrt{2}$, $x_{BK} = -1$, $x_+ = 1 - \sqrt{2}$ et $x_{FM} = 1$, les valeurs des quatre points critiques génériques pour $Q = 2$ dans le cas d'un réseau carré (voir sous-section 3.3.1).

\mathcal{B}_L est composée également de $2L$ branches partant à l'infini, avec des angles θ_n donnés par l'Eq. (5.27). De plus, dans cette limite des grands $|x|$, ces branches correspondent à des croisements entre les secteurs $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$, $\chi_{1,1}$ dominant pour x réel positif. Ainsi, la valeur propre dominante pour une large L dans la limite des grands $|x|$ est dans le secteur $\chi_{1,1}$ pour les régions asymptotiques telles que :

$$\arg x \in (\theta_{2n-1}(L), \theta_{2n}(L)) , \text{ avec } n = 1, 2, \dots, L . \quad (5.29)$$

Dans les autres régions asymptotiques, la valeur propre dominante vient du secteur $\chi_{1,3}$. Ces faits s'interprètent en calculant le développement pour $|x|$ grand des valeurs propres dominantes dans chaque secteur. On note en utilisant l'Eq. (5.29) qu'il y a des effets de parité de L : pour x réel négatif grand, le secteur $\chi_{1,1}$ domine pour L pair, et $\chi_{1,3}$ domine pour L impair. Plus précisément :

1. Le secteur $\chi_{1,1}$ domine sur la ligne physique $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.
2. Pour L pair, le secteur $\chi_{1,1}$ est dominant pour tout x réel.
3. Pour L impair, $\chi_{1,1}$ est dominant sur la ligne physique, mais $\chi_{1,3}$ est dominant pour $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il peut être choquant de constater que dans la limite $L \rightarrow \infty$, les zéros de la fonction de partition sont denses dans tout le plan complexe excepté l'intérieur des deux cercles considérés précédemment, puisqu'il y a alors une infinité de branches partant à l'infini. Cependant, il ne faut pas en conclure que l'énergie libre est singulière dans toute cette zone (le raisonnement habituel de Fisher n'est plus valable car il s'agit d'un domaine)! Cela signifie juste que dans cette limite les secteurs $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$ sont tous deux dominants.

Notons que les conjectures faites sont des généralisations de résultats obtenus par Shrock pour une largeur 2 dans [87] et par Chang et Shrock pour une largeur 3 dans [90]. Les points $x = -1 + \exp(\pm i\frac{\pi}{2})$, $x = -\sqrt{2}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ avaient été identifiés comme zéros limites, et leurs multiplicités avaient été étudiées, pour ces deux largeurs. De plus, les domaines de dominance des valeurs propres avaient été aussi déterminées pour ces largeurs.

En plus des points fixes pour lesquels l'énergie libre est singulière dans la limite thermodynamique, il y a les points fixes qui ne sont pas détectables avec la méthode utilisée. Il s'agit de $x = -\infty$, $x = 0$, et $x = \infty$. Les points fixes $-\sqrt{2}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ étant non critiques, on en déduit le diagramme de phase du modèle d'Ising, représenté Fig. (5.3). Notons qu'il est invariant sous la transformation de dualité $x \rightarrow \frac{1}{x}$, alors que les \mathcal{B}_L ne sont pas invariants par dualité. Cela est dû au fait que les CL cycliques empêchent le réseau d'être autodual. Cependant, le modèle d'Ising étant simple, le diagramme de phase ne dépend pas des CL, et est invariant sous dualité. De plus, le modèle d'Ising possède la symétrie exacte $K \rightarrow -K$ (il suffit de changer l'état des spins sur un des deux sous-réseaux, cf. le réseau carré est bipartite), ce qui correspond pour la température x à

$$x \rightarrow -\frac{x}{1 + x\sqrt{2}}. \quad (5.30)$$

En combinant les transformations de dualité et de renversement de spins, on peut relier entre eux tous les points fixes critiques du modèle :

$$x_{FM} \xrightarrow{\text{renv.}} x_+ \xrightarrow{\text{dualité}} x_- \xrightarrow{\text{renv.}} x_{BK}, \quad (5.31)$$

les premier et dernier points de la série étant autoduaux. De la même façon, tous les points fixes triviaux (i.e. non critiques) sont reliés :

$$x = 0 \xrightarrow{\text{dualité}} |x| = \infty \xrightarrow{\text{renv.}} x = -1/\sqrt{2} \xrightarrow{\text{dualité}} x = -\sqrt{2}, \quad (5.32)$$

les premier et dernier points étant invariants sous renversement des spins. Cela explique en particulier pourquoi les structures autour de $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|x| = \infty$ sont équivalentes, la symétrie sous renversement des spins étant exacte (i.e. valable à L fini). De plus, on voit que les quatre points critiques sont équivalents, et donc ont tous la même charge centrale $c = \frac{1}{2}$.

Ainsi, le fait de prendre p entier modifie profondément et enrichit le diagramme de phase du modèle par rapport à p quelconque. En prenant la limite $p \rightarrow 4$, on aurait eu trois points fixes répulsifs équivalents de charge centrale $\frac{1}{2}$ situés en x_{FM} et x_{\pm} . On aurait eu également trois points fixes attractifs : x_{BK} de charge centrale $-\frac{25}{2}$ (voir l'Eq. (3.55) pour $p \rightarrow 4$) et deux points triviaux situés en $x = 0$ et $|x| = \infty$. Le flot de renormalisation correspondant est représenté en haut de la Fig. (5.3). En se mettant directement à $p = 4$, on a deux points fixes supplémentaires, à savoir $-\sqrt{2}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces deux points sont attractifs, tandis que x_{BK} devient répulsif et équivalent aux trois autres points critiques (sa charge centrale devient notamment $\frac{1}{2}$). Ainsi, la structure du diagramme de phase dans la région antiferromagnétique est modifiée.

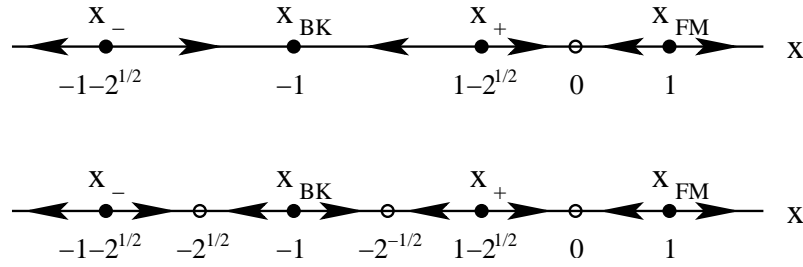


FIG. 5.3 – Diagramme de phase et flot de renormalisation pour le modèle de Potts à $Q \rightarrow 2$ états (en haut) et pour le modèle d’Ising $Q = 2$ (en bas). Les cercles pleins, resp. vides, correspondent à des points fixes critiques, resp. non critiques.

En particulier, x_{BK} étant répulsif, il n’y a plus de phase de Berker-Kadanoff, dans le sens où le comportement à grande distance du système pour x compris entre x_- et x_+ n’est plus déterminé par x_{BK} .

5.2.4 Généralisation à p entier quelconque

Nous allons énoncer les généralisations des conjectures précédentes au cas de p entier quelconque. Les courbes limites obtenues pour $p = 5$ sont représentées Fig. (5.4), et celles pour $p = 6$ Fig. (5.5). Les courbes correspondant à $p = 6$ (i.e. $Q = 3$) et $L = 3$ avaient été déjà obtenues par Chang et Shrock Fig. 8 p. 268 de [89], lorsqu’on tient compte du fait qu’ils n’avaient pas considéré le plan des x complexes, mais le plan des u complexes, la variable u étant reliée à x par $u = \frac{1}{\sqrt{Q}x+1}$. Nos conjectures étendent donc à n’importe quelle largeur L les résultats qu’ils avaient obtenus pour des largeurs de 2 ou 3. On a conjecturé que pour le modèle de Potts à $Q = B_p$ états sur réseau carré et une largeur $L \geq 2$ [22] :

1. Les points $x = -\exp\left(\pm i\frac{\pi}{p}\right)$ appartiennent à la courbe limite. En ces points, toutes les valeurs propres sont équimodulaires de module 1. Par conséquent, ce sont en général des points multiples.
2. Pour p pair, le point $x = -\frac{\sqrt{Q}}{2}$ est un zéro limite. Idem pour le point $x = -\sqrt{Q}$ si p vaut 4 ou 6. Ce sont des points multiples dont les angles des branches sont donnés respectivement par les Eq. (5.28) et (5.27).
3. Dans la limite $L \rightarrow \infty$, x_{FM} , x_{BK} , x_{\pm} appartiennent à l’intersection de \mathcal{B}_L avec l’axe des abscisses, et sont par conséquent des points critiques.
4. Les cercles $|x| = 1$ et $\left|x + \frac{2}{\sqrt{Q}}\right| = \sqrt{\frac{4-Q}{Q}}$ appartiennent à \mathcal{B}_{∞} .
5. Il y a, pour toute valeur (entière) de p , $2L$ branches allant à l’infini, de pentes données par l’Eq. (5.27), et correspondant toujours à des croisements entre les secteurs $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$: les autres $\chi_{1,2j+1}$ ne jouent pas de rôle pour $|x| \rightarrow \infty$, c’est pourquoi on a dans cette limite la même structure que pour le modèle d’Ising.

Pour l’étude des secteurs dominants sur l’axe réel, les résultats sont légèrement plus compliqués que pour le modèle d’Ising :

1. Le secteur $\chi_{1,1}$ domine toujours sur la ligne physique $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{Q}}, \infty\right)$.
2. Pour L pair, le secteur $\chi_{1,1}$ est dominant pour tout x réel, sauf éventuellement dans un intervalle contenu dans $\left[-\sqrt{Q}, -\frac{\sqrt{Q}}{2}\right]$.

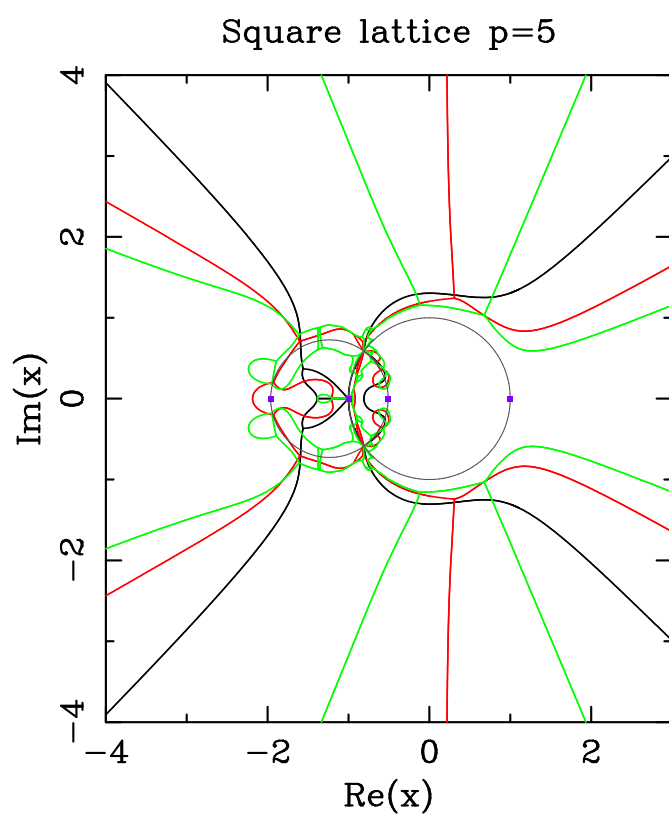


FIG. 5.4 – Courbes limites à $p = 5$, pour un réseau carré de largeur $L = 2$ (en noir), $L = 3$ (en rouge), et $L = 4$ (en vert).

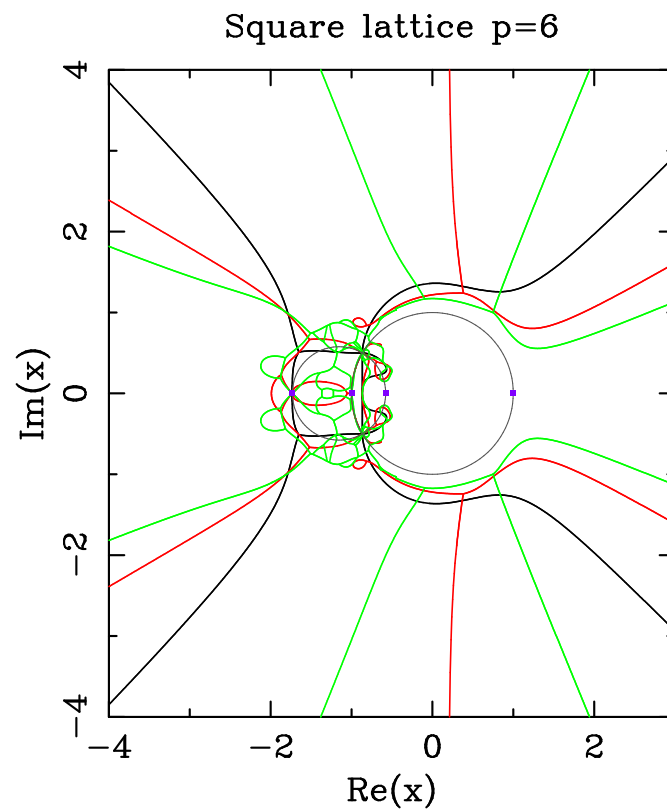


FIG. 5.5 – Courbes limites à $p = 6$, pour un réseau carré de largeur $L = 2$ (en noir), $L = 3$ (en rouge), et $L = 4$ (en vert). Les courbes correspondant à $L = 3$ avaient déjà été obtenues par Chang et Shrock Fig. 8 p. 268 de [90].

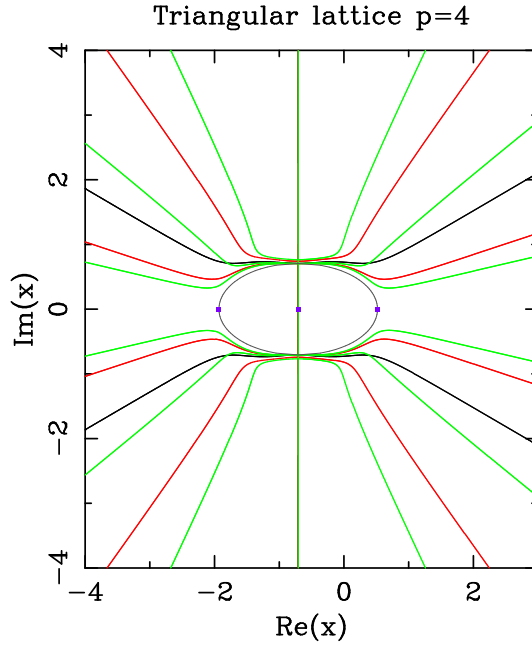


FIG. 5.6 – Courbes limites à $p = 4$, pour un réseau triangulaire de largeur $L = 2$ (en noir), $L = 3$ (en rouge), et $L = 4$ (en vert). Les courbes correspondant à $L = 2$ avaient déjà été obtenues par Chang et Shrock Fig. 15 de [88], mais dans le plan des u complexes, u étant reliée à x par $u = \frac{1}{\sqrt{Q}x+1}$. On conjecture que l'ellipse représentée appartienne à \mathcal{B}_∞ . Les carrés correspondent aux trois points critiques pour Q génériques (x_+ et x_{BK} coïncident). On voit qu'il y a un point critique supplémentaire.

3. Pour L impair, $\chi_{1,3}$ domine pour $x < x_0 \leq -\sqrt{Q}$, la valeur de x_0 dépendant de p , et $\chi_{1,1}$ domine pour $x \geq -\frac{\sqrt{Q}}{2}$.

Les conclusions en ce qui concerne le diagramme de phase sont identiques au cas du modèle d'Ising, excepté qu'il y a plus de nouveaux points fixes entre x_- et x_{BK} et entre x_{BK} et x_+ , et que leurs caractéristiques ne sont pas équivalentes, car il n'y a plus invariance de jauge.

5.2.5 Cas du réseau triangulaire

Les conclusions dans le cas d'un réseau triangulaire sont analogues. Les courbes limites obtenues pour le modèle d'Ising sont représentées Fig. (5.6). Dans notre article [22], les courbes pour d'autres valeurs de p sont données. Chang et Shrock avaient déjà déterminé ces courbes (mais dans le plan des u complexes) pour une largeur de 2 et des valeurs de Q de 2, 3 et 4 [88]. Nos conjectures sont ainsi des généralisations à n'importe quelles valeurs de p et de L de leurs résultats. On a conjecturé que pour le modèle de Potts à $Q = B_p$ états sur réseau triangulaire et une largeur $L \geq 2$ [22] :

1. Les points $x = -\exp(\pm i\frac{\pi}{2})$ appartiennent à la courbe limite. En ces points, toutes les valeurs propres sont équimodulaires de module 1. Par conséquent, ce sont en général des points multiples.
2. Pour p pair et supérieur ou égal à 6, le point $x = -\frac{2}{\sqrt{Q}}$ est un zéro limite. Idem pour $-\frac{1}{\sqrt{Q}}$ si p vaut 4 ou 6.

3. Dans la limite $L \rightarrow \infty$, x_{FM} , x_{BK} , x_- appartiennent à l'intersection de \mathcal{B}_L avec l'axe des abscisses, et sont par conséquent des points critiques.
4. Il y a, pour toute valeur (entière) de p , $2(2L - 1)$ branches allant à l'infini, de pentes données par :

$$\theta_n = \frac{\pi}{2(2L - 1)}(2n - 1) \text{ avec } n = 1, 2, \dots, 2(2L - 1), \quad (5.33)$$

et correspondant toujours à des croisements entre les secteurs $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$.

Les résultats pour les secteurs dominants sont les suivants :

1. Pour p pair, le secteur $\chi_{1,1}$ domine toujours sur la ligne physique $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{Q}}, \infty\right)$. Pour p impair, c'est aussi le cas à condition d'avoir L suffisamment grand.
2. $\chi_{1,3}$ domine pour $x < -\frac{2}{\sqrt{Q}}$.

5.2.6 CL cycliques fixées

Les branches partant à l'infini étaient une conséquence du fait que les valeurs propres dominantes des secteurs $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$ devenaient égales. Ce fait s'interprète très simplement dans le cas du modèle d'Ising en utilisant la correspondance entre spins et hauteurs exposée à la fin de la sous-section 4.2.5. $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$ sont associés à des CL transverses fixées, en l'occurrence respectivement $++$ et $+-$, et donc dans la limite d'un réseau infini coïncident. Par contre, au sein d'un secteur donné, il y a un écart fini entre la valeur propre dominante et sous-dominante pour $|x|$ grand, ce qui implique bien un comportement non critique. Afin d'éviter la coexistence, sans conséquence du point de vue du comportement critique, entre ces deux CL, on peut choisir des CL brisant explicitement la symétrie Z_Q du modèle de Potts. Nous choisissons comme CL transverses $++$, car ces CL ont l'avantage de permettre le développement en $\chi_{1,2j+1}$ de la fonction de partition Z_{++} en utilisant l'Eq. (5.7). Pour p entier quelconque, ce développement contient $\chi_{1,1}$ mais ne contient pas $\chi_{1,3}$, ce qui va bien supprimer les branches allant à l'infini.

Les courbes \mathcal{B}_L obtenues ressemblent en fait beaucoup à celles pour des CL libres (dans les deux directions). Afin d'expliquer cela, on procède en deux étapes. D'abord, nous expliquons pourquoi les courbes limites qui correspondent à $\chi_{1,1}$ *uniquement* coïncident presque avec les courbes des CL libres. Ensuite, nous prenons en compte l'effet des autres $\chi_{1,2j+1}$, sachant que $\chi_{1,3}$ n'est pas présent.

Avec des CL cycliques, on a :

$$K_{1,1} = \text{Tr}[T_0^N] = \sum_i \lambda_i^N, \quad (5.34)$$

où T_0 est la matrice de transfert dans la représentation en amas à 0 pont, et les λ_i ses valeurs propres. A cause des couplages entre $K_{1,2j+1}$, donné par l'Eq. (4.52), les valeurs propres de $T_{1,1}$ (la matrice de transfert générant $\chi_{1,1}$) forment seulement un sous-ensemble des valeurs propres de T_0 . Plus précisément :

$$\chi_{1,1} = \sum_i \bar{\alpha}_i \lambda_i^N, \quad (5.35)$$

avec $\bar{\alpha}_i = 0$ ou 1 indépendamment de x . Dans le cas où $L < p - 1$, l'Eq. (4.52) donne simplement $\chi_{1,1} = K_{1,1}$ et donc tous les $\bar{\alpha}_i$ valent alors 1. D'autre part, la fonction de partition du modèle

de Potts avec des CL libres (dans les deux directions) est donnée par :

$$Z_{ff} = \langle f | T_0^N | i \rangle = \sum_i \alpha_i \lambda_i^N, \quad (5.36)$$

les α_i étant les amplitudes dues aux CL *longitudinales* libres. Notons que comme expliqué sous-section 2.2.3 beaucoup de α_i sont identiquement nuls. Par exemple, dans le cas d'un réseau carré, seules les valeurs propres correspondant à des vecteurs symétriques sous réflexion peuvent contribuer. Pour x réel positif, tous les poids étant positifs, on montre en utilisant des arguments probabilistes analogues à ceux de la sous-section 4.2.5 que la valeur propre dominante λ_0 provient de $K_{1,1}$ et n'est pas annulée par des valeurs propres provenant des autres $K_{1,2j+1}$. Par conséquent, $\bar{\alpha}_0 = 1$. D'autre part, le théorème de Perron-Frobenius et la structure des vecteurs $|i\rangle$ et $|f\rangle$ impliquent que $\alpha_0 > 0$. On en conclut que les termes dominants de $\chi_{1,1}$ et Z_{ff} sont proportionnels. Par prolongement analytique, cela reste vrai dans un domaine du plan complexe situé au voisinage de l'axe des x positifs. Cependant, lorsqu'on s'éloigne trop de cet axe, un croisement va se produire entre λ_0 et une autre valeur propre λ_i . Si aucune des fonctions α_i et $\bar{\alpha}_i$ n'est *identiquement* nulle, la branche correspondante de \mathcal{B}_L est présente dans les deux cas. En s'éloignant encore plus de l'axe, d'autres croisements peuvent avoir lieu, et les branches coïncident toujours, jusqu'à ce qu'un croisement entre λ_j et λ_k ait lieu pour lequel soit $\alpha_j = 0$ et $\bar{\alpha}_j \neq 0$, ou réciproquement $\alpha_j \neq 0$ et $\bar{\alpha}_j = 0$. Si $L < p - 1$ la seule possibilité est la première puisque tous les $\bar{\alpha}_i$ valent 1.

Si l'on compare maintenant les courbes limites de Z_{ff} et Z_{++} , l'argument précédent ne sera plus valide si jamais le premier croisement lorsqu'on s'éloigne de l'axe des x positifs fait intervenir une valeur propre de $\chi_{1,2j+1}$ avec $j > 0$. Ce n'est pas le cas lorsque $\chi_{1,3}$ est exclu, c'est pourquoi les courbes limites de Z_{ff} et Z_{++} se ressemblent. Par contre, pour des CL cycliques, Z contient $\chi_{1,3}$ et le premier croisement a lieu entre $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,3}$ (cf. les branches allant à l'infini discutées sous-section 5.2.3). De ce fait, les courbes limites de Z_{ff} et Z sont très différentes.

Le cas du modèle d'Ising sur réseau carré est représenté Fig. (5.7). D'autres cas sont donnés dans [22]. Nous voyons, par comparaison avec la Fig. (5.2), que B_L est bien différent pour des CL cycliques fixées. En particulier, on n'a plus de branches partant à l'infini. De plus, les points d'intersection entre B_L et l'axe des abscisses changent, et ce même dans la limite $L \rightarrow \infty$! En effet, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ n'est plus un zéro limite. Il se pose donc le problème de savoir si le diagramme de phase change avec les CL. En effet, pour x positif, on s'attend pour des raisons probabilistes à ce que ce ne soit pas le cas, cependant pour x négatif cela est à priori possible. Nous ne pouvons pas répondre, car il faudrait avoir des valeurs numériques de L plus élevées et étudier l'énergie libre le long de l'axe des abscisses. La seule certitude que nous ayons est que la phase de Berker-Kadanoff disparaît à p entier aussi bien pour des CL cycliques que des CL cycliques fixées.

5.2.7 Conclusions

Nous avons étudié le diagramme de phase du modèle de Potts à B_p états avec des CL cycliques ou cycliques fixées, de manière à avoir un développement de la fonction de partition Z du modèle de Potts à l'aide de fonctions de partition $\chi_{1,2l+1}$ du modèle RSOS A_{p-1} . Ce développement nous a permis, en utilisant le théorème de Beraha-Kahane-Weiss [42], de déterminer les courbes \mathcal{B}_L sur lesquelles s'accumulent les zéros de Z s'accumulent lorsque la largeur reste fixée à L et la longueur $N \rightarrow \infty$. De plus, le modèle RSOS permet de caractériser

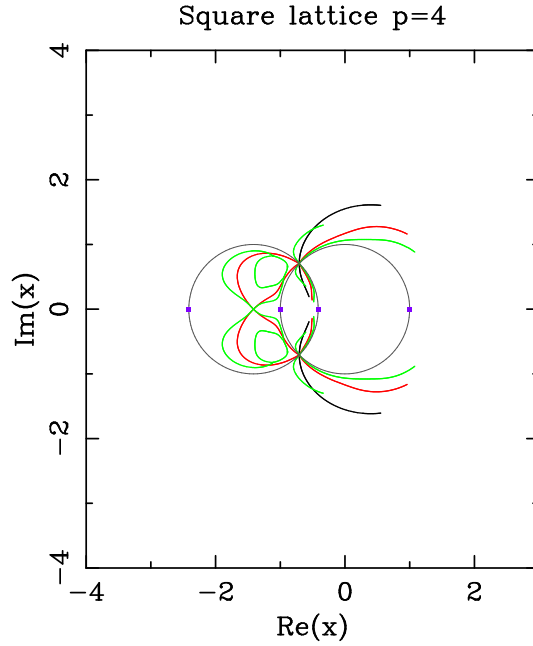


FIG. 5.7 – Courbes limites à $p = 4$, pour un réseau carré de largeur $L = 2$ (en noir), $L = 3$ (en rouge), et $L = 4$ (en vert), avec des conditions aux limites cycliques fixées. On conjecture que les deux cercles représentés appartiennent à \mathcal{B}_∞ . Les carrés correspondent aux quatre points critiques pour Q génériques. On voit qu'il n'y a qu'un seul zéro limite supplémentaire $x = -\sqrt{2}$ et non deux, lorsque les CL sont cycliques fixées.

les différentes phases du diagramme par le nombre l correspondant à la valeur propre dominante dans cette phase. Le fait que les courbes \mathcal{B}_L présentent des aspects similaires quel que soit L nous a permis de faire des conjectures sur la limite thermodynamique $L \rightarrow \infty$ du modèle de Potts, et donc sur son diagramme de phase.

Nous donnons les principales conclusions de notre étude, en les numérotant dans le même ordre que les questions posées en introduction :

1. $x_{FM}(Q)$ et $x_-(Q)$ (ainsi que son dual $x_+(Q)$ dans le cas d'un réseau carré), qui sont des points critiques dans le diagramme de phase générique, jouent un rôle similaire à p entier. Ce résultat n'est pas surprenant, car ce n'est pas au niveau de ces points qu'on s'attend à ce que la valeur propre dominante dans la représentation en amas ait une amplitude nulle. Il est par contre surprenant que $x_{BK}(Q)$ soit toujours un point critique. Cependant, ses propriétés sont changées, voir par exemple la Fig. (5.3), et déterminer ses caractéristiques pour p entier quelconque reste une question ouverte.
2. Pour un réseau carré, \mathcal{B}_∞ contient $x = -\frac{\sqrt{Q}}{2}$ pour p entier et $x = -\sqrt{Q}$ pour Q entier (voir la sous-section 5.2.4). Pour un réseau triangulaire, \mathcal{B}_∞ contient $x = -\frac{2}{\sqrt{Q}}$ pour p entier et $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$ pour Q entier (voir la sous-section 5.2.5). Ainsi, pour les deux réseaux le modèle subit une transition de phase sur la ligne chromatique $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}$ ou son dual, mais uniquement pour Q entier. Il est tentant de penser que la ligne chromatique et son dual joueraient des rôles identiques avec des CL périodiques dans les deux directions.
3. Nous avons vu que dans le cas de CL cycliques, les zéros de Z sont denses dans un domaine important du plan des températures complexes, incluant la région $|x| \gg 1$. Cela n'est plus

le cas lorsqu'on considère des CL cycliques/fixées. Un autre exemple de l'importance des CL a été donné par l'argument de la sous-section 5.2.6 selon lequel que se restreindre à $\chi_{1,1}$ revient essentiellement à considérer un modèle de Potts avec des CL libres.

4. Il est intéressant de comparer les points critiques que nous avons obtenus en considérant l'intersection des \mathcal{B}_L avec l'axe des abscisses avec ceux obtenus par Jacobsen et Saleur en calculant numériquement la charge centrale effective [92]. En particulier, il est plausible que les deux nouveaux points critiques qu'ils ont identifié Fig. 23 de [92] soient situés exactement en $x = -\frac{1}{\sqrt{Q}} \simeq -0.618$ et $x = -\frac{\sqrt{Q}}{2} \simeq -0.809$. Ces points font partie des nouveaux points critiques que nous avons obtenus.

Chapitre 6

Cas de conditions aux limites toroïdales

Nous avons dans les chapitres 3 et 5 étudié des modèles de Potts avec des conditions aux limites cycliques. En particulier, nous avons décomposé la fonction de partition du modèle de Potts et expliqué les raisons pour lesquelles la phase de Berker-Kadanoff disparaissait lorsque p est entier. La question qui se pose est de savoir ce qui se passe pour d'autres CL, notamment des CL toroïdales. Cette question n'est pas triviale, car dans la zone des $x < 0$, nous avons vu dans le chapitre 5 que le diagramme de phase dépendait fortement des CL.

Le cas des CL toroïdales est complexe et a été beaucoup moins étudié que celui des CL cycliques. Nous rappelons dans la section 6.1 les différentes études qui ont été faites. Dans la sous-section 6.1.1, nous donnons les amplitudes obtenues par Read et Saleur en utilisant la méthode du gaz de Coulomb [130]. Ils ont en effet généralisé les calculs de Di Francesco, Saleur et Zuber publiés dans [29]. Cependant, ces amplitudes ne sont *a priori* valables que pour un modèle de Potts critique avec des CL toroïdales dans la limite continue. Le problème est donc de savoir si ces amplitudes sont également correctes pour un réseau quelconque et n'importe quelle température. Dans la sous-section 6.1.2, nous parlons des études algébriques effectuées, qui consistent à étudier les représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb périodique [19]. Nous finissons la section par exposer les travaux de Chang et Shrock publiés dans [90] et [46], qui ont motivé notre article [53].

En effet, notre méthode combinatoire, comme expliqué dans le chapitre 3, est très proche de la méthode utilisée par Chang et Shrock, à ceci près qu'elle va permettre beaucoup plus facilement de tenir compte des permutations possibles entre points noirs. Dans la section 6.2, nous exposons les problèmes posés par les CL toroïdales. Dans la section 6.3, nous étudions le développement de la fonction de partition Z proprement dit. Ces deux sections correspondent à notre étude publiée dans [53]. [53] est une version améliorée de [52] (dans [52], nous avons considéré le groupe symétrique S_l et non le groupe cyclique C_l , ce qui introduisait des complications). Les formules nouvelles et importantes obtenues sont l'Eq. (6.55), donnant un développement général de Z quel que soit la taille et la température du réseau et mettant en évidence l'effet des permutations possibles entre points noirs (à savoir les permutations du groupe cyclique C_l), ainsi que l'Eq. (6.61) donnant l'expression des amplitudes en fonction des caractères des représentations irréductibles (irreps) de C_l . L'Eq. (6.61) permet de relier les amplitudes au niveau l aux $b^{(l)}$ obtenus par Chang et Shrock [46], voir l'Eq. (6.62), et de retrouver

la formule de Read et Saleur en calculant les sommes de Ramanujan [138] intervenant dans l'équation. Notre méthode permet donc de prouver cette formule dans un cadre très général et d'en donner une interprétation physique nouvelle. Ces résultats ont été publiés dans [53].

6.1 Etudes existantes sur les CL toroïdales

6.1.1 Méthode du gaz de Coulomb

De nombreux résultats sur les systèmes critiques en dimension 2 ont été obtenus en utilisant le gaz de Coulomb. La méthode consiste à reformuler le modèle considéré en un modèle d'interface, puis à montrer que sous renormalisation les propriétés critiques du modèle sont décrites par un champ libre bosonique. Le propagateur correspondant étant logarithmique, et se comportant donc le potentiel d'interaction entre deux charges en dimension deux, la méthode a été appelée méthode du gaz de Coulomb [129]. Une excellente revue sur cette méthode a été donnée par Nienhuis [128]. Di Francesco, Saleur et Zuber se sont intéressés dans [29] à son intégration dans le formalisme de la théorie conforme des champs et à son application au calcul de la fonction de partition du modèle de Potts avec des CL toroïdales. Read et Saleur ont repris et étendu ce calcul dans [130]. Notons dès le départ que, du fait de la méthode utilisée, ces calculs ne sont valables que pour un modèle de Potts critique ($x = x_{FM}$) et dans la limite continue. Cependant, les amplitudes obtenues sont en fait correctes pour un réseau de n'importe quelle taille et pour n'importe quelle température. Cela est dû à des raisons algébriques analogues à celles du chapitre 3, où l'étude des représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb permettait de généraliser des résultats de théorie conforme. Nous présenterons ces méthodes algébriques dans la sous-section suivante.

Di Francesco, Saleur et Zuber [29] ont décomposé la fonction de partition Z en deux parties Z_a et Z_b correspondant respectivement aux configurations non dégénérées et aux configurations dégénérées (voir la sous-section 4.2.1) :

$$Z = Z_a + Z_b . \quad (6.1)$$

Read et Saleur, en généralisant les calculs effectués dans [29], ont calculé Z_a et Z_b , et ont obtenu que [130] :

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{1}{\eta(y)\eta(\bar{y})} \left(\sum_P y^{\Delta_{e_0+P,0}(g)} \bar{y}^{\bar{\Delta}_{e_0+P,0}(g)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l>0, m>0, P:m|l, P \wedge m=1} \Lambda(l, m; e_0) y^{\Delta_{P/m,l}(g)} \bar{y}^{\bar{\Delta}_{P/m,l}(g)} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} Z_b &= \frac{Q-1}{2} \frac{1}{\eta(y)\eta(\bar{y})} \left(\sum_P y^{\Delta_{\frac{1}{2}+P,0}(g)} \bar{y}^{\bar{\Delta}_{\frac{1}{2}+P,0}(g)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l>0, m>0, P:m|l, P \wedge m=1} \Lambda(l, m; \frac{1}{2}) y^{\Delta_{P/m,l}(g)} \bar{y}^{\bar{\Delta}_{P/m,l}(g)} \right) . \end{aligned} \quad (6.3)$$

e_0 est lié au nombre d'états Q par $\sqrt{Q} = 2 \cos(\pi e_0)$, i.e. est égal à $\frac{1}{p}$, et g vaut simplement $1 - e_0$. Les $\Delta_{e,l}$ et $\bar{\Delta}_{e,l}$ correspondent aux dimensions holomorphes et antiholomorphes du modèle dans la limite continue (dans le langage du gaz de Coulomb e et l sont respectivement les charges

électrique et magnétique des opérateurs), et sont donnés par :

$$\Delta_{e,l}(g) = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{\sqrt{g}} + l\sqrt{g} \right)^2 \quad (6.4)$$

$$\bar{\Delta}_{e,l}(g) = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{\sqrt{g}} - l\sqrt{g} \right)^2, \quad (6.5)$$

tandis que les amplitudes associées sont :

$$\Lambda(l, m; e_0) = 2 \sum_{d>0: d|l} \frac{\mu\left(\frac{m}{m \wedge d}\right) \phi\left(\frac{l}{d}\right)}{l \phi\left(\frac{m}{m \wedge d}\right)} \cos(2\pi d e_0). \quad (6.6)$$

μ et ϕ sont respectivement la fonction de Möbius et la fonction totient d'Euler [137]. $\mu(n)$ vaut $(-1)^r$, si n est un entier s'écrivant comme le produit de r nombres premiers distincts, $\mu(1)$ vaut 1, et $\mu(n)$ vaut 0 dans les autres cas. $\phi(n)$ est le nombre d'entiers m tels que $1 \leq m \leq n$ et $n \wedge m = 1$.

P correspond à une polarisation. Le sens physique de l est la moitié du nombre de pattes dans la représentation en boucles. m est un nombre numérotant les différents opérateurs pour l donné. Ce qui nous intéresse, pour comparer avec la suite, ce sont les nombres de ponts. l ponts correspond à $2l$ pattes, et donc les $\Lambda(l, m; e_0)$ donnent les amplitudes au niveau l . L'exception est pour $l = 1$, à cause des configurations dégénérées (qui ont un amas non trivial, mais aucune boucle non triviale, voir la sous-section 4.2.1). $l = 1$ correspond en fait à l'opérateur de spin et doit être traité séparément. On trouve que $b^{(0)} = 1$ (opérateur identité) et $b^{(1)} = Q - 1$, tandis que les amplitudes pour $l \geq 2$ sont données par :

$$b^{(l,m)} = \Lambda(l, m; e_0) + (Q - 1) \Lambda\left(l, m; \frac{1}{2}\right). \quad (6.7)$$

Il faut bien noter que, contrairement au cas des CL cycliques, il y a plusieurs amplitudes au niveau l , numérotées par m . m étant un diviseur de l , on en déduit que le nombre d'amplitudes au niveau l est égal au nombre de diviseurs de l , que nous notons $q(l)$. Le défaut de cette approche est qu'elle n'est valable que dans la limite continue à un point critique.

6.1.2 Méthode algébrique

Une approche possible est d'étendre l'approche algébrique de Pasquier et Saleur [16], exposée dans la sous-section 3.2.2, au cas des CL toroïdales. Pasquier et Saleur avaient considéré le modèle à six vertex correspondant, plus précisément une chaîne XXZ de spin $\frac{1}{2}$ avec des termes de surface imaginaires correspondant à la limite anisotrope du modèle. Pour cela, ils avaient étudié les représentations irréductibles de l'algèbre de Temperley-Lieb, en utilisant l'invariance sous le groupe quantique $U_q(sl(2))$. Dans le cas des CL toroïdales, on peut montrer que la matrice de transfert est constituée d'opérateurs e_i , $1 \leq i \leq 2L$, constituant une algèbre de Temperley-Lieb périodique, dans laquelle un nouvel élément e_{2L} est ajouté par rapport à l'algèbre de TL. e_{2L} satisfait les relations de commutation suivantes :

$$e_{2L}^2 = \sqrt{Q} e_{2L} \quad (6.8)$$

$$e_i e_{2L} e_i = e_i, \text{ pour } i = 1, 2L - 1 \quad (6.9)$$

$$e_{2L} e_i e_{2L} = e_{2L}, \text{ pour } i = 1, 2L - 1 \quad (6.10)$$

$$e_i e_{2L} = e_{2L} e_i, \text{ pour } i \neq 1, 2L - 1. \quad (6.11)$$

Cette structure algébrique, qui intervient dans les modèles de Potts et les chaînes XXZ avec des CL périodiques, a été mise en évidence par Lévy [134]. Une revue sur l'algèbre de TL et ses généralisations (dont l'algèbre de TL périodique) a été faite par Nichols [19].

Les représentations de cette algèbre ont été étudiées par Martin et Saleur [132],[131]. Elles sont beaucoup plus compliquées que celles de l'algèbre de TL, car l'algèbre de TL périodique contient un nombre infini de mots, contrairement à l'algèbre de TL.

L'étude de la chaîne XXZ de spin $\frac{1}{2}$ avec des CL toroïdales a été effectuée par Alcaraz, Grimm, et Rittenberg [133]. Alcaraz et Martins ont étudié le spectre de la chaîne XXZ de spin S quelconque et son lien avec celui de la chaîne XXZ de spin $\frac{1}{2}$ [135]. Le spectre du modèle de Potts ne se déduit pas facilement du spectre de la chaîne XXZ pour des CL périodiques. Il est nécessaire de combiner différents secteurs de twist du modèle XXZ . Cela a été discuté dans [133],[136].

Ce qu'il faut retenir est que de manière générale la procédure algébrique utilisée pour les CL cycliques peut s'étendre au cas des CL toroïdales : on étudie les représentations irréductibles de l'algèbre de TL périodique au lieu de l'algèbre de TL. Cependant, comme les représentations irréductibles ainsi que le lien entre le modèle XXZ (i.e. le modèle à six vertex) et le modèle de Potts sont compliqués, il est beaucoup plus difficile de décomposer l'espace de Hilbert en espaces de représentation irréductible, et donc de décomposer la fonction de partition du modèle. Néanmoins, cela permet de s'attendre à ce que les amplitudes obtenues par la méthode du gaz de Coulomb soit toujours valable. Une preuve rigoureuse devrait être donnée par Saleur dans les prochains mois.

6.1.3 Méthode diagrammatique

Chang et Shrock ont généralisé la procédure d'inclusion-exclusion, exposée dans la sous-section 3.2.1. Dans [46], ils considèrent des diagrammes respectant la symétrie sous rotation du réseau et obtiennent les coefficients $b^{(l)}$ définis par :

$$b^{(l)} = \begin{cases} \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \frac{2l}{l+j} \binom{l+j}{l-j} Q^j + (-1)^l (Q-1) & \text{pour } l \geq 2 \\ \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q^j & \text{pour } l \leq 2 \end{cases} \quad (6.12)$$

Les coefficients $b^{(l)}$ sont l'équivalent des coefficients $c^{(l)}$, mais dans le cas de CL toroïdales. Cependant, ce ne sont pas les amplitudes des valeurs propres à cause des permutations possibles entre points noirs. Ainsi, les amplitudes ne sont pas les mêmes pour toutes les valeurs propres du même niveau l , contrairement à ce qui se passait pour les CL cycliques. Cependant, par sommation sur les amplitudes au niveau l , on obtient $b^{(l)}$. Ce point, noté par Chang et Shrock dans [46], a été développé dans notre article [53] et nous donnerons donc dans la suite des relations précises entre les amplitudes des valeurs propres et les $b^{(l)}$.

Chang et Shrock ont dans [46] étudié la matrice de transfert pour des largeurs petites. Une conclusion importante de leurs études est qu'il y a des dégénérescences entre valeurs propres entre niveaux différents, et que ces dégénérescences dépendent de la largeur L considérée. Ils ont également déterminé les amplitudes des valeurs propres des premiers niveaux. Ils ont trouvé

ainsi que :

$$b^{(0)} = 1 \quad (6.13)$$

$$b^{(1)} = Q - 1 \quad (6.14)$$

$$b^{(2,1)} = \frac{1}{2}Q(Q - 3) \quad (6.15)$$

$$b^{(2,2)} = \frac{1}{2}(Q - 1)(Q - 2) \quad (6.16)$$

$$b^{(3,1)} = \frac{1}{3}(Q - 1)(Q^2 - 5Q + 3) \quad (6.17)$$

$$b^{(3,3)} = \frac{1}{3}Q(Q - 2)(Q - 4) . \quad (6.18)$$

Ces amplitudes sont égales à celles calculées par la méthode du gaz de Coulomb exposée dans la sous-section 6.1.1, ce qui laisse penser que la formule (6.7) a une validité générale. Nous le prouverons dans la suite.

6.2 Préliminaires mathématiques

6.2.1 Fonctions de partition restreintes

Nous exposons maintenant et jusqu'à la fin du chapitre nos travaux, publiés dans [53]. Nous avons vu dans la sous-section 4.2.4 que la topologie des amas pour des CL toroïdales est plus compliquée que pour des CL cycliques avec lesquelles seule la percolation horizontale était possible. Les amas non triviaux (NTC) sont caractérisés par le couple (n_1, n_2) indiquant combien de fois ils percolent horizontalement et verticalement. Comme dans la suite nous serons seulement intéressés par les propriétés des amas selon la direction de propagation de la matrice de transfert, choisie horizontale comme précédemment, nous considérerons uniquement n_1 . On appelle branche d'un amas une de ses n_1 parties percolant horizontalement. Un NTC donné réalise une permutation P entre les positions de ses n_1 branches. On décrit ainsi totalement la topologie d'un NTC selon l'horizontale par n_1 et la permutation $P \in S_{n_1}$. Il y a des restrictions sur les permutations P possibles. La permutation P est cyclique, car sinon elle correspondrait à plusieurs amas différents avec un nombre de branches plus petit. Par conséquent, P est une permutation cyclique. De plus, comme des branches différentes ne peuvent se couper, seules les permutations cycliques avec un écart constant entre deux positions consécutives sont permises. Par exemple, pour $n_1 = 4$, seules (1234) et (1432) sont autorisées.¹

Rappelons que pour une configuration d'amas donnée tous les NTC ont la même topologie, et donc mêmes n_1 et P . De plus, les positions relatives des branches correspondant à des amas différents sont telles que les amas soient intriqués les uns dans les autres. On note j le nombre de NTC d'une configuration avec $n_1 \geq 1$. Un exemple est donné Fig. (6.1). Les configurations sans NTC et les configurations avec des NTC ne percolant que verticalement correspondent à $j = 0$. On appelle $Z_{j,n_1,P}$ la fonction de partition du modèle de Potts restreinte à des configurations d'amas avec j NTC caractérisés par $n_1 \geq 1$ et P , Z_{j,n_1} la fonction de

¹Il faut bien noter que nous considérons ici les permutations qui peuvent être réalisées par *un seul* NTC, et non toutes les permutations à un niveau l donné, car les points noirs peuvent être attribués à des NTC différents. Par exemple, les permutations autorisées au niveau $l = 4$ sont Id, (1234), (13)(24) et (1432), i.e. correspondent au groupe cyclique C_4 .

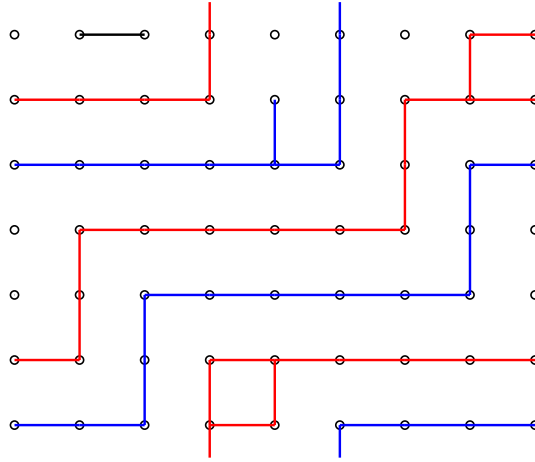


FIG. 6.1 – Configuration d’amas contenant $j = 2$ amas non-triviaux, représentés en rouge et en bleu. Chaque amas non trivial est caractérisé par son nombre de branches, $n_1 = 2$, ainsi que la permutation qu’il réalise, $P = (12)$. Au sein d’une configuration donnée, tous les amas non-triviaux ont la même topologie.

partition restreinte à des configurations avec j NTC d’indice n_1 , $Z_{j,n_1>1}$ la fonction de partition restreinte à des configurations avec j NTC d’indice strictement supérieur à un, Z_j la fonction de partition restreinte à des configurations avec j NTC *percolant horizontalement*, et Z la fonction de partition totale. On a les relations suivantes :

$$Z_{j,n_1} = \sum_{P \in S_{n_1}} Z_{j,n_1,P} \quad (6.19)$$

$$Z_{j,n_1>1} = \sum_{n_1=2}^L Z_{j,n_1} \quad (6.20)$$

$$Z_j = \sum_{n_1=1}^L Z_{j,n_1} \quad (6.21)$$

$$Z = \sum_{j=0}^L Z_j. \quad (6.22)$$

Pour un réseau générique, par exemple triangulaire, les $Z_{j,n_1,P}$ non nuls sont tous ceux correspondant à une permutation P autorisée, et à $n_1 j \leq L$, comme le nombre total de branches ne peut dépasser la largeur L du réseau. Pour un réseau carré, les $Z_{j,n_1,P}$ avec $n_1 j = L$ et $n_1 > 1$ sont nuls. Cela est dû au fait que les amas ne peuvent avancer et se décaler latéralement en même temps : il n’y a pas de lien diagonal comme dans le réseau triangulaire. Dans la suite, nous considérons toujours un réseau générique.

6.2.2 Structure de la matrice de transfert

La structure de la matrice de transfert T est semblable au cas cyclique, exposé sous-section 3.1.1. T est diagonale par blocs, et on note T_l la matrice correspondant à l points noirs (et une connectivité inférieure triviale). Cependant, du fait des CL transverses périodiques, il

il y a pour un niveau l donné plus d'états de connectivité possibles qu'avec des CL transverses libres. En effet, les croisements entre partitions sont toujours interdits, mais certains ne sont qu'*apparents* à cause de la symétrie par rotation d'une tranche du réseau. Notons que les croisements ayant lieu entre partitions supérieures ne sont jamais apparents (et donc sont toujours interdits), mais par contre il peut y avoir des croisements apparents entre ponts ou entre un pont et une partition supérieure.

Ainsi, si on attribue n_1 points noirs à un amas d'indice n_1 et correspondant à la permutation P , alors au final les ponts seront permutés de P . Toutes les permutations P ne sont pas autorisées. Nous montrerons dans la sous-section 2.3 que les permutations autorisées à un niveau l donné (prenant en compte toutes les manières d'attribuer l points noirs aux configurations d'amas) sont les éléments du groupe cyclique C_l . On note $n_{\text{tor}}(L, l)$ le nombre d'états de connectivité possible au niveau l sans tenir compte des permutations possibles entre ponts. La dimension de T_l est donc $ln_{\text{tor}}(L, l)$. On note $|v_{l,i}\rangle$, $1 \leq i \leq n_{\text{tor}}(L, l)$, les $n_{\text{tor}}(L, l)$ états de connectivité standard au niveau l : par convention le premier pont commence en $1'$, le second en $2'$, etc. ... Les $ln_{\text{tor}}(L, l)$ états de base au niveau l peuvent être obtenus en appliquant des permutations de C_l entre points noirs sur les $|v_{l,i}\rangle$. On peut montrer que [46] :

$$n_{\text{tor}}(L, l) = \begin{cases} \frac{1}{L+1} \binom{2L}{L} & \text{pour } l = 0 \\ \binom{2L-1}{L-1} & \text{pour } l = 1 \\ \binom{2L}{L-l} & \text{pour } 2 \leq l \leq L \end{cases} \quad (6.23)$$

et clairement que $n_{\text{tor}}(L, l) = 0$ pour $l > L$.

T_l elle-même est diagonale par blocs dans une base appropriée. En effet, T_l commute avec les permutations entre points noirs, car elle ne "sait" pas d'où viennent les ponts. Par conséquent, on peut décomposer T_l en $T_{l,D}$ où $T_{l,D}$ est la restriction de T_l aux états se transformant selon la représentation irréductible (irrep) D de C_l . Comme C_l est un groupe abélien de cardinal l , il a l irreps de dimension 1. On peut obtenir la base correspondante à l'aide du projecteur

$$p_D = \frac{1}{l} \sum_{P \in C_l} \chi^{(D)}(P) P, \quad (6.24)$$

les $\chi^{(D)}(P)$ étant le caractère de P dans l'irrep D . L'application de toutes les permutations de S_l sur un vecteur standard $|v_{l,i}\rangle$ donné engendre une représentation régulière de C_l , qui contient donc une fois chacune les irreps D (de dimension 1). Comme il y a en tout $n_{\text{tor}}(L, l)$ vecteurs standards, la dimension de $T_{l,D}$ est $n_{\text{tor}}(L, l)$.

6.2.3 Définition des $K_{l,D}$

Comme dans le cas cyclique, K_l est défini comme la trace de $(T_l)^N$. T_l commutant avec C_l , on a :

$$K_l = l \sum_{i=1}^{n_{\text{tor}}(L, l)} \langle v_{l,i} | (T_l)^N | v_{l,i} \rangle. \quad (6.25)$$

Contrairement au cas cyclique, on ne peut pas décomposer la fonction de partition Z en K_l à cause des permutations possibles entre points noirs, comme nous le verrons. Il est alors nécessaire de travailler avec des quantités plus élémentaires, les $K_{l,D}$, définis comme la trace de $(T_{l,D})^N$.

T_l et p_D commutant avec C_l , on a :

$$K_{l,D} = l \sum_{i=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} \langle v_{l,i} | p_D (T_l)^N | v_{l,i} \rangle . \quad (6.26)$$

On a bien sur :

$$K_l = \sum_D K_{l,D} , \quad (6.27)$$

la somme portant sur toutes les irreps D de C_l . Ainsi, lorsque les CL sont toroïdales, les amplitudes des valeurs propres au niveau l ne sont plus toutes identiques, elles dépendent aussi de D . En effet :

$$K_{l,D} = \sum_{k=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} (\lambda_{l,D,k})^N . \quad (6.28)$$

Afin de décomposer Z en $K_{l,D}$, nous passerons par les K_{l,P_l} définis par :

$$K_{l,P_l} = \sum_{i=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} \langle v_{l,i} | (P_l)^{-1} (T_l)^N | v_{l,i} \rangle , \quad (6.29)$$

P_l étant une permutation du groupe cyclique C_l . K_{l,P_l} correspond à avoir un état final égal à l'état initial sur lequel la permutation P_l a été appliquée. Notons que $K_{l,\text{Id}}$ vaut simplement $\frac{K_l}{l}$. A cause des permutations possibles entre points noirs, le développement de Z contiendra non seulement $K_{l,\text{Id}}$, mais aussi tous les autres K_{l,P_l} , P_l étant une permutation de C_l . Nous montrerons que les coefficients devant les K_{l,P_l} ne dépendent que de la classe, *relativement au groupe symétrique* S_l , de P_l . Nous noterons ces classes (d_i, n_1) , où les d_i ($i = 1, \dots, q(l)$) sont des diviseurs de l et $n_1 = \frac{l}{d_i}$. Il est ainsi naturel de définir $K_{(d_i, n_1)}$ comme :

$$K_{(d_i, n_1)} = \sum_{P_l \in (d_i, n_1)} K_{l,P_l} , \quad (6.30)$$

la somme portant sur les permutations P_l appartenant à la classe (d_i, n_1) . Cette définition nous permettra de simplifier l'écriture de certaines formules, mais au final nous utiliserons les K_{l,P_l} .

Une fois que nous aurons obtenu le développement de Z en K_{l,P_l} , nous aurons besoin d'exprimer les K_{l,P_l} en fonction des $L_{l,D}$ afin d'obtenir le développement de Z en $K_{l,D}$, qui sont les quantités directement reliées aux valeurs propres. On a d'après les Eq. (6.26) et (6.24) :

$$K_{l,D} = \sum_{P_l} \chi_D(P_l) K_{l,P_l} . \quad (6.31)$$

On peut inverser ces relations afin d'exprimer les K_{l,P_l} en fonction des $K_{l,D}$, puisque le nombre de permutations de C_l est égal au nombre d'irreps D de C_l . Pour cela, on multiplie l'Eq. (6.31) par $\bar{\chi}_D(C_l)$, on somme sur les irreps D au niveau l , puis on utilise la relation d'orthogonalité entre caractères $\sum_D \bar{\chi}_D(P_l) \chi_D(P'_l) = l \delta(P_l, P'_l)$ [69]. On trouve alors que :

$$K_{l,P_l} = \sum_D \frac{\bar{\chi}_D(P_l)}{l} K_{l,D} , \quad (6.32)$$

et on a la relation :

$$\sum_D \bar{\chi}_D(P_l) = l \delta(P_l, \text{Id}) . \quad (6.33)$$

6.2.4 Propriétés utiles du groupe cyclique C_l

Dans la suite nous obtiendrons une expression des amplitudes au niveau l qui fait intervenir des sommes des caractères des irreps D de C_l . Afin de retrouver l'Eq. (6.7), nous devons calculer ces sommes. Nous exposons ici les résultats que nous utiliserons.

C_l est le groupe engendré par la permutation $E_l = (12 \dots l)$. Il est abélien et composé de l éléments donnés par E_l^a , $1 \leq a \leq l$.² Leur structure cyclique est donnée par la règle suivante. On note d_i , $1 \leq i \leq q(l)$, les entiers divisant l (en particulier $d_1 = 1$ et $d_{q(l)} = l$), et A_{d_i} l'ensemble des entiers qui sont un produit de d_i par un entier n tel que $1 \leq n \leq \frac{l}{d_i}$ et $n \wedge \frac{l}{d_i} = 1$.³ Si $a \in A_{d_i}$ alors E_l^a est composé de d_i cycles intriqués de même longueur $\frac{l}{d_i}$. On note la classe correspondante $\left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)$. Le nombre d'éléments de A_{d_i} , et donc le nombre de tels E_l^a , vaut $\phi\left(\frac{l}{d_i}\right)$, où ϕ est la fonction totient d'Euler dont la définition a été rappelée dans la sous-section 6.1.1.⁴

Considérons C_6 comme exemple. Les permutations de C_6 de classe $(1, 6)$ sont $E_6 = (123456)$ et $E_6^5 = (165432)$. Les permutations de $(2, 3)$ sont $E_6^2 = (135)(246)$ et $E_6^4 = (153)(264)$.⁵ Il y a seulement les permutations $E_6^3 = (14)(25)(36)$ dans $(3, 2)$ et $E_6^6 = \text{Id}$ dans $(6, 1)$. En effet, les diviseurs entiers de 6 sont 1, 2, 3, 6, et on a $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_6 = \{6\}$.

C_l a l irreps notées D_k , avec $1 \leq k \leq l$. Les caractères correspondant sont $\chi_{D_k}(E_l^a) = \exp\left(-i2\pi \frac{ka}{l}\right)$.⁶ Nous devons calculer dans la suite les sommes données par :

$$\sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) = \sum_{a \in A_{d_i}} \exp\left(i2\pi \frac{ka}{l}\right). \quad (6.34)$$

Ces sommes sont des généralisations de sommes de Ramanujan.⁷ En utilisant le théorème 272 de [138], on obtient que :

$$\sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) = \frac{\mu\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right) \phi\left(\frac{l}{d_i}\right)}{\phi\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right)}, \quad (6.35)$$

où k est supposé appartenir à A_d et m est donné par $\frac{l}{d}$. μ est la fonction de Möbius et a été définie dans la sous-section 6.1.1. Notons que les k qui sont dans le même A_d donnent le même résultat, c'est pourquoi on peut se restreindre à k égal à un diviseur de l afin d'avoir les différentes valeurs de ces sommes. En effet, nous numérotions les différentes amplitudes au niveau l à l'aide de m .

²Avec la convention choisie, l'identité correspond à $a = l$.

³L'union de tous les A_{d_i} est $\{1, 2, \dots, l\}$.

⁴Noter que $\sum_{d_i|l} \phi\left(\frac{l}{d_i}\right) = l$.

⁵Noter que par exemple $(123)(456)$ n'est pas un élément de C_6 comme il n'est pas intriqué.

⁶Avec la convention utilisée, la représentation identité est D_l .

⁷Dans le cas où la somme porte sur A_1 , il s'agit d'ailleurs exactement d'une somme de Ramanujan.

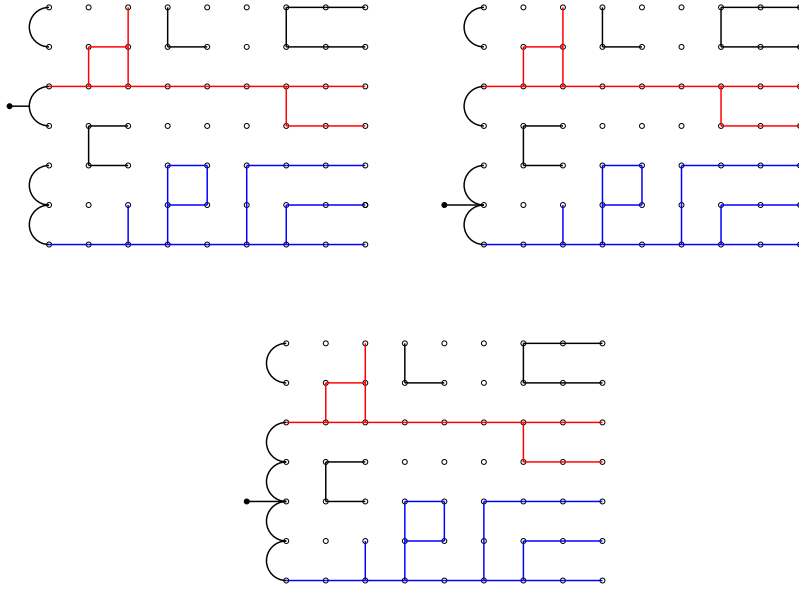


FIG. 6.2 – Etats de connectivité standards au niveau 1 compatibles avec une configuration d’amas donnée de $Z_{2,1}$. La façon de procéder est la même que pour les CL cycliques.

6.3 Décomposition de la fonction de partition

6.3.1 Expression des K_l

On peut, en procédant comme pour les CL cycliques, voir sous-section 3.1.2, décomposer les K_l à l’aide des Z_{j,n_1} . Pour cela, déterminons le nombre d’états $|v_{l,i}\rangle$ compatibles avec une configuration donnée de Z_{j,n_1} . On considère d’abord le cas $n_1 = 1$ et on suppose que le k ème NTC relie les points y_k de la dernière colonne (on “oublie” encore que les CL longitudinales sont périodiques). Les $|v_{l,i}\rangle$ compatibles avec cette configuration d’amas obéissent aux mêmes règles que pour les CL cycliques, et donc il y en a $n_{\text{tor}}(j, l)$. Le coefficient dans la décomposition de K_l situé devant $Z_{j,1}$ est donc $\frac{ln_{\text{tor}}(j,l)}{Q^j}$, car à partir d’un vecteur standard $|v_{l,i}\rangle$ on peut à l’aide des permutations de C_l former l états et car le poids des j NTC dans K_l vaut 1 au lieu de Q^j . Un exemple est donné Fig. (6.2).

Supposons maintenant que $n_1 > 1$. On note $\{y_{k,m}\}$ les points reliés par la m ème branche du k ème NTC (m varie entre 1 et n_1 et k entre 1 et j), et $\{y_k\} = \cup_{m=1}^{n_1} \{y_{k,m}\}$ les points reliés par le k ème NTC. Comme montré dans la Fig. (6.3), les $v_{l,i}$ compatibles avec cette configuration sont tels que :

1. Les connectivités des points $y \notin \cup_{k=1}^j \{y_k\}$ sont les mêmes que dans la configuration d’amas.
2. Les points $\{y_{k,m}\}$ correspondant à la même branche d’un NTC doivent être connectés.
3. Il faut maintenant dénombrer le nombre de façons dont on peut relier les branches des k NTC entre elles et attribuer l points noirs de manière à ce que la connectivité et la position des points noirs demeurent inchangées après l’action de la configuration d’amas. Pour $l \geq 2$, il n’y a pas d’états compatibles (en effet, il n’est pas possible de respecter la planarité et de laisser la position des points noirs inchangée). Pour $l = 1$ et $l = 0$, il y a

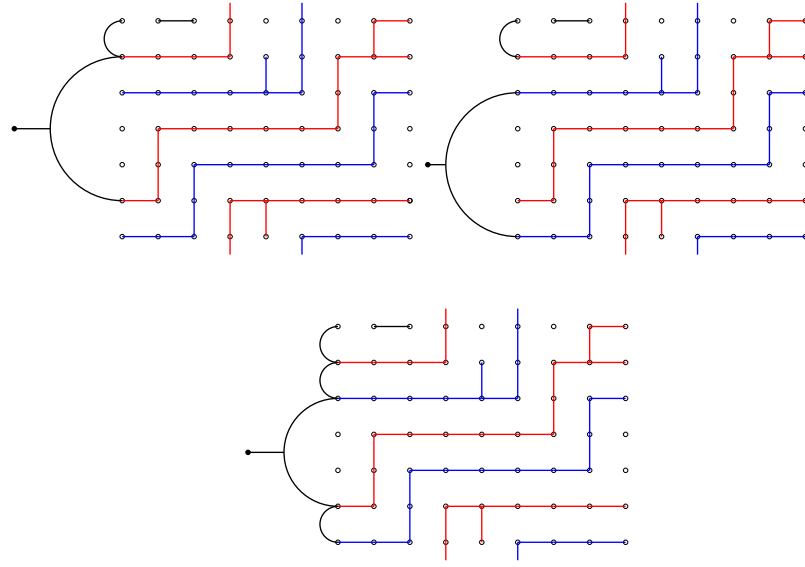


FIG. 6.3 – Etats de connectivité standards au niveau 1 compatibles avec une configuration d’amas donnée de $Z_{2,2}$.

respectivement $\binom{2j-1}{j} = \frac{\binom{2j}{j}}{2}$ et $\binom{2j}{j}$ états compatibles. Notons que ce résultat ne dépend pas de la valeur précise de n_1 (pour $n_1 > 1$).

La troisième règle entraîne que le développement de K_l pour $l \geq 2$ ne contient pas de Z_{j,n_1} avec $n_1 > 1$. La décomposition de K_l est donc, pour $l \geq 2$, donnée simplement par :

$$K_l = \sum_{j=l}^L l n_{\text{tor}}(j, l) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} . \quad (6.36)$$

Les décompositions de K_1 et K_0 sont :

$$K_1 = \sum_{j=1}^L n_{\text{tor}}(j, 1) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (2j - 1) \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j} , \quad (6.37)$$

$$K_0 = \sum_{j=0}^L n_{\text{tor}}(j, 0) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} 2^j \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j} . \quad (6.38)$$

Les coefficients devant les Z_{j,n_1} ne dépendent pas de la valeur précise de n_1 pour $n_1 > 1$. On a posé pour simplifier l’écriture que $Z_{0,1} = Z_0$.

6.3.2 Coefficients $b^{(l)}$

Comme les coefficients devant $Z_{j,1}$ et $Z_{j,n_1>1}$ sont différents, on ne peut pas exprimer les K_l en fonction des $Z_j = Z_{j,1} + Z_{j,n_1>1}$ dans les Eq. (6.36) à (6.38). Par conséquent, on ne peut pas inverser ces relations, car il y a plus de $Z_{j,1}$ et $Z_{j,n_1>1}$ que de K_l . Par contre, il y a autant de $Z_{j,1}$ (et de Z_j) que de K_l . C’est donc à cause des $Z_{j,n_1>1}$ que le problème est plus compliqué

que pour les CL cycliques (pour lesquelles la seule valeur de n_1 des NTC était 1). Oublions pour le moment ces $Z_{j,n_1>1}$, et supposons qu'on a simplement, pour tout l :

$$K_l = \sum_{j=l}^L l n_{\text{tor}}(j, l) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} . \quad (6.39)$$

Alors ces équations sont inversibles et on obtient :

$$Z_{j,1} = \sum_{l=j}^L b_j^{(l)} \frac{K_l}{l} , \quad (6.40)$$

où les coefficients $b_j^{(l)}$ sont les termes en Q^j de $b^{(l)}$ défini par :

$$b^{(l)} \equiv \sum_{j=0}^l b_j^{(l)} = \begin{cases} \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \frac{2l}{l+j} \binom{l+j}{l-j} Q^j + (-1)^l (Q-1) & \text{pour } l \geq 2 \\ \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q^j & \text{pour } l \leq 2 \end{cases} \quad (6.41)$$

Nous retrouvons donc bien les $b^{(l)}$ obtenus par Chang et Shrock à l'aide de diagrammes [46], et donnés dans l'Eq. (6.12). Les $b^{(l)}$ jouent un rôle analogue aux $c^{(l)}$ mais pour des CL toroïdales. D'ailleurs, les $b^{(l)}$ et $c^{(l)}$ sont égaux pour $l \leq 2$. En sommant les $Z_{j,1}$ (rappelons que nous oublions pour le moment les $Z_{j,n_1>1}$), on obtient que :

$$Z = \sum_{l=0}^L b^{(l)} \frac{K_l}{l} . \quad (6.42)$$

A cause des $Z_{j,n_1>1}$ réalisant des permutations entre points noirs, l'équation précédente est modifiée. Nous allons devoir introduire des coefficients $b^{(l,D)}$ dépendant de l'irrep D de C_l et écrire $Z = \sum_{l=0}^L \sum_D b^{(l,D)} K_{l,D}$. En l'absence des $Z_{j,n_1>1}$, on aurait d'après l'Eq. (6.42) $b^{(l,D)} = \frac{b^{(l)}}{l}$ indépendamment de D . Nous verrons que les $Z_{j,n_1>1}$ lèvent cette dégénérescence des amplitudes, mais d'une façon particulière, car nous verrons qu'il y a des relations entre les $b^{(l,D)}$ et les $b^{(l)}$.

Afin de simplifier les formules que nous obtiendrons plus tard, on définit les coefficients $\tilde{b}^{(l)}$ pour $l \geq 1$ par :

$$\tilde{b}^{(l)} = \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \frac{2l}{l+j} \binom{l+j}{l-j} Q^j + (-1)^l (Q-1) . \quad (6.43)$$

Pour $l \geq 2$, $\tilde{b}^{(l)}$ est simplement égal à $b^{(l)}$, ils sont différents uniquement pour $l = 1$, car $b^{(1)} = Q-1$ and $\tilde{b}^{(1)} = -1$. Afin de retrouver la formule (6.7) de Read et Saleur pour les amplitudes, nous utiliserons que :

$$\tilde{b}^{(l)} = 2 \cos(2\pi l e_0) + (-1)^l (Q-1) , \quad (6.44)$$

où e_0 a été défini dans la sous-section 6.1.1 comme $\sqrt{Q} = 2 \cos(\pi e_0)$.

6.3.3 Décomposition des K_{l,P_l}

Les relations (6.36) à (6.38) n'étaient pas inversibles car les K_l n'étaient pas en nombre suffisant. Nous allons donc considérer le développement des K_{l,P_l} , qui lui sera inversible : il faut tenir compte des permutations possibles des points noirs.

Un état de connectivité standard avec l points noirs est dit P_l -compatible avec une configuration d'amas donnée si l'action de cette configuration sur l'état de connectivité donne un état de connectivité final différant de l'état initial par une permutation P_l des points noirs. Il s'agit d'une généralisation de la notion de compatibilité utilisée sous-section 3.1.2, afin de prendre en compte les permutations entre points noirs.

Dénombrons d'abord le nombre de connectivités standards $|v_{l,i}\rangle$ qui sont P_l -compatibles avec une configuration d'amas donnée contribuant à $Z_{j,n_1,P}$. Pour $n_1 = 1$, S_{n_1} contient uniquement l'identité Id , et donc les résultats de la sous-section 6.3.1 s'appliquent : les $Z_{j,1}$ contribuent uniquement à $K_{l,\text{Id}}$. On considère ensuite une configuration contribuant à $Z_{j,n_1,P}$ avec $n_1 > 1$. Les $|v_{l,i}\rangle$ qui sont P_l -compatibles avec cette configuration satisfont les mêmes règles que celles données dans la sous-section 6.3.1 pour $n_1 > 1$, à condition de modifier la troisième règle, les points noirs devant être attribués de manière à ce que *l'état final diffère de l'état initial par une permutation P_l* .

Cette modification rend l'attribution des points noirs beaucoup plus complexe que dans la sous-section 6.3.1. Notons tout d'abord que tous les P_l ne sont pas autorisés. En effet, la décomposition cyclique des permutations autorisées ne peut que contenir que P , P étant la permutation entre branches réalisée par chaque NTC de la configuration d'amas. Par conséquent, les permutations autorisées contiennent seulement P et sont telles que $l = d_i n_1$, en appelant d_i le nombre de fois que P est contenu. On note (d_i, n_1) les classes correspondantes de permutations et $K_{(d_i, n_1)}$ les K associés, voir Eq. (6.30). Le nombre de classes de permutations autorisées à un niveau l donné est donc égal au nombre d'entiers d_i divisant l , à savoir $q(l)$. De plus, à l'intérieur de ces classes, toutes les permutations ne sont pas autorisées. En effet, comme les *NTC* sont intriqués, elles doivent avoir une structure cyclique intriquée. Par conséquent, comme annoncé précédemment, les permutations autorisées au niveau l forment le groupe cyclique C_l .

Considérons le développement de K_{l,P_l} , représenté dans la Fig. (6.4), P_l étant une permutation autorisée différente de l'identité et contenant d_i fois la permutation P de longueur n_1 . Alors, seuls les $Z_{j,n_1,P}$ avec $j \geq d_i$ contribuent à la décomposition de K_{l,P_l} . On trouve que le nombre de $|v_{l,i}\rangle$ qui sont P_l -compatibles avec une configuration d'amas donnée de $Z_{j,n_1,P}$ est $\binom{2j}{j-d_i}$.⁸ Par conséquent, on a :

$$K_{l,P_l} = \sum_{j=d_i}^{\lfloor \frac{l}{n_1} \rfloor} \binom{2j}{j-d_i} \frac{Z_{j,n_1,P}}{Q^j}. \quad (6.45)$$

On en déduit la décomposition des $K_{(d_i, n_1)}$:

$$K_{(d_i, n_1)} = \sum_{j=d_i}^{\lfloor \frac{l}{n_1} \rfloor} \binom{2j}{j-d_i} \frac{Z_{j,n_1}}{Q^j}. \quad (6.46)$$

⁸Noter que $\binom{2j}{j-d_i}$ est simplement $n_{\text{tor}}(j, d_i)$ pour $d_i \geq 2$ mais est différent pour $d_i = 1$, voir l'Eq. (6.23).

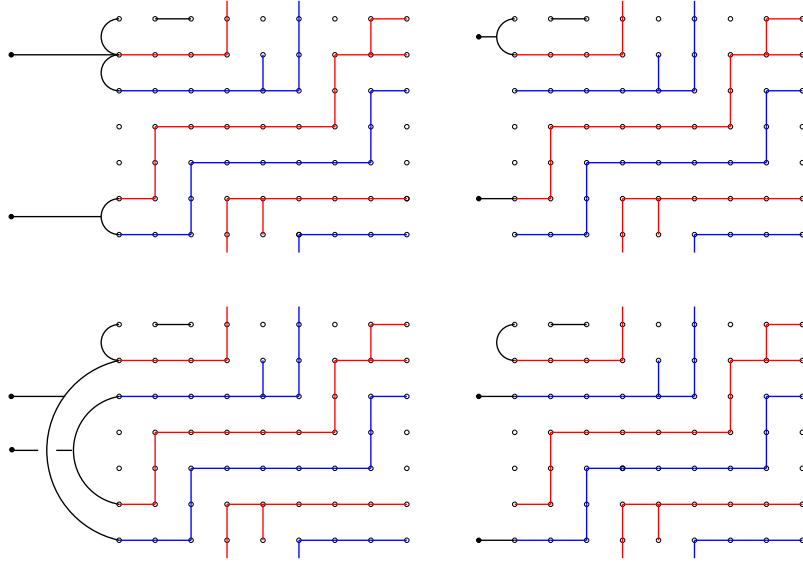


FIG. 6.4 – Etats de connectivité standards au niveau 2, (12)-compatibles avec une configuration d’amas donnée de $Z_{2,2}$: après application de la configuration d’amas sur ces états de connectivité, la position des deux points noirs est permutée.

Nous utiliserons la décomposition des $K_{(d_i, n_1)}$ dans la suite car il est plus simple de travailler avec les Z_{j, n_1} plutôt qu’avec les $Z_{j, n_1, P}$ (mais on pourrait le faire).

Il reste à étudier le cas particulier où $P_l = \text{Id}$. Ce cas est trivial. La valeur de n_1 dans le développement en Z_{j, n_1} n’est plus fixée, et donc on doit sommer sur les valeurs possibles de n_1 , et prendre en compte que le cas $n_1 = 1$ est particulier. On obtient à un facteur global près les Eq. (6.36)-(6.38) de la sous-section 6.3.1, puisque $K_{l, \text{Id}} = \frac{K_l}{l}$.

6.3.4 Développement de Z_j en K_{l, P_l}

Pour avoir le développement de Z_j en K_{l, P_l} on inverse l’Eq. (6.46) pour d_i variant et $n_1 > 1$ fixé. On obtient que pour $n_1 > 1$:

$$Z_{j, n_1} = Q^j \sum_{d_i=j}^{\lfloor \frac{L}{n_1} \rfloor} (-1)^{d_i-j} \frac{2d_i}{d_i+j} \binom{d_i+j}{d_i-j} K_{(d_i, n_1)} \quad \text{pour } n_1 > 1. \quad (6.47)$$

Comme pour $n_1 > 1$ les coefficients sont indépendants de n_1 , on peut écrire :

$$Z_{j, n_1 > 1} = Q^j \sum_{d_i=j}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^{d_i-j} \frac{2d_i}{d_i+j} \binom{d_i+j}{d_i-j} K_{(d_i, n_1 > 1)} \quad (6.48)$$

où on rappelle les notations $Z_{j, n_1 > 1} = \sum_{n_1=2}^L Z_{j, n_1}$ et $K_{(d_i, n_1 > 1)} = \sum_{n_1=2}^L K_{(d_i, n_1)}$, correspondant à des permutations composées de d_i cycles de même longueur > 1 .

Considérons maintenant le cas $n_1 = 1$. On a simplement pour $j \geq 2$:

$$Z_{j, 1} = \sum_{l=j}^L \frac{b_j^{(l)}}{l} K_l, \quad (6.49)$$

d'après l'Eq. (6.40) et le fait que pour $l \geq 2$ les $Z_{j,n_1>1}$ n'apparaissent pas dans le développement de K_l . Cependant, selon les Eqs. (6.37)–(6.38), les $Z_{j,n_1>1}$ apparaissent pour $l = 0$ et $l = 1$, et on obtient :

$$Z_{1,1} = \sum_{l=1}^L \frac{b_1^{(l)}}{l} K_l - \frac{Q}{2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \binom{2j}{j} \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j} . \quad (6.50)$$

En injectant le développement des $Z_{j,n_1>1}$, donné Eq. (6.48), dans l'Eq. (6.50), on obtient le développement de $Z_{1,1}$ en K_l et $K_{(d_i,n_1)}$:

$$Z_{1,1} = \sum_{l=1}^L \frac{b_1^{(l)}}{l} K_l + Q \sum_{d_i=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^{d_i} K_{(d_i,n_1>1)} . \quad (6.51)$$

On procède de la même façon pour Z_0 . On a :

$$Z_0 = \sum_{l=0}^L \frac{b_0^{(l)}}{l} K_l - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \binom{2j}{j} \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j} . \quad (6.52)$$

Après injection du développement (6.48) des $Z_{j,n_1>1}$, on a :

$$Z_0 = \sum_{l=0}^L \frac{b_0^{(l)}}{l} K_l + \sum_{d_i=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^{d_i} K_{(d_i,n_1>1)} . \quad (6.53)$$

Comme $Z_j = Z_{j,1} + Z_{j,n_1>1}$, en utilisant les Eq. (6.49) et (6.48) ainsi que l'Eq. (6.43), on déduit que, pour tout j :

$$\boxed{Z_j = \sum_{l=j}^L \frac{b_j^{(l)}}{l} K_l + \sum_{d_i=j}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \tilde{b}_j^{(d_i)} K_{(d_i,n_1>1)}} . \quad (6.54)$$

Le développement de Z , comme $Z = \sum_{0 \leq j \leq L} Z_j$, est :

$$Z = \sum_{l=0}^L \frac{b^{(l)}}{l} K_l + \sum_{d_i=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \tilde{b}^{(d_i)} K_{(d_i,n_1>1)} . \quad (6.55)$$

6.4 Amplitudes des valeurs propres

6.4.1 Développement de Z en $K_{l,D}$

Dans la sous-section précédente, nous avons obtenu le développement (6.54) de Z_j en fonction des K_{l,P_l} (comme $K_{(d_i,n_1)}$ est la somme des K_{l,P_l} avec P_l permutation de C_l de classe (d_i, n_1)). Cependant, ce sont les $K_{l,D}$ qui sont directement reliés aux valeurs propres de la matrice de transfert T . C'est pourquoi nous utilisons la relation (6.32) entre les K_{l,P_l} et les K_{l,D_k} afin d'obtenir les développements des Z_j en fonction des K_{l,D_k} . Le résultat est :

$$Z_j = \sum_{l,D_k} b_j^{(l,D_k)} K_{l,D_k} , \quad (6.56)$$

où les coefficients $b_j^{(l, D_k)}$ sont donnés par

$$b_j^{(l, D_k)} = \frac{b_j^{(l)}}{l} + \sum_{(d_i < l) | l} \frac{\tilde{b}_j^{(d_i)}}{l} \sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) . \quad (6.57)$$

En effet, $K_l = \sum_{D_k} K_{l, D_k}$, et comme $K_{(d_i, n_1)}$ correspond au niveau $l = d_i n_1$, on a $K_{(d_i, n_1)} = \sum_{D_k \in C_{d_i n_1}} \frac{\bar{\chi}_{D_k}((d_i, n_1))}{l} K_{d_i n_1, D_k}$ ((d_i, n_1) est la classe des permutations composées de d_i cycles de même longueur $n_1 = \frac{l}{d_i}$). Comme expliqué dans la sous-section 6.3.2, les $b_j^{(l, D_k)}$ ne sont pas simplement égaux aux $\frac{b_j^{(l)}}{l}$ à cause des termes avec $n_1 > 1$. En utilisant l'Eq. (6.33), on trouve néanmoins qu'ils satisfont la relation suivante :

$$\sum_{D_k \in C_l} b_j^{(l, D_k)} = b_j^{(l)} . \quad (6.58)$$

De plus, d'après l'Eq. (6.57) les $b_j^{(l, D_k)}$ avec $l < 2j$ sont triviaux, i.e. égaux à $\frac{b_j^{(l)}}{l}$ indépendamment de D . Cela peut se prouver directement en considérant le développement (6.36) de K_l .

Le développement de Z en K_{l, D_k} est évidemment donné par :

$$Z = \sum_{l, D_k} b^{(l, D_k)} K_{l, D_k} , \quad (6.59)$$

où

$$b^{(l, D_k)} = \sum_{j=1}^l b_j^{(l, D_k)} , \quad (6.60)$$

i.e.

$$\boxed{b^{(l, D_k)} = \frac{b^{(l)}}{l} + \sum_{(d_i < l) | l} \frac{\tilde{b}^{(d_i)}}{l} \sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l)} . \quad (6.61)$$

Il s'agit du résultat central de notre article : nous avons obtenu une expression simple des amplitudes $b^{(l, D)}$ en fonction des caractères des irreps D . A priori, à un niveau l donné, il devrait y avoir l amplitudes distinctes $b^{(l, D)}$ car C_l a l irreps. distinctes D . Cependant, comme deux permutations dans la même classe $\left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)$ correspondent au même coefficient $b^{(d_i)}$, il y a moins d'amplitudes distinctes : certains $b^{(l, D)}$ sont identiques. En effet, l'Eq. (6.61) donnant les amplitudes des valeurs propres contient des sommes de Ramanujan généralisées. On en déduit, en utilisant la sous-section 6.2.4, que les D_k dont les k sont dans le même A_d correspondent à la même amplitude $b^{(l, D_d)}$. Par exemple, au niveau 6, il y a seulement quatre amplitudes distinctes : $b^{(6, D_1)}$, $b^{(6, D_2)}$, $b^{(6, D_3)}$ et $b^{(6, D_6)}$, comme $b^{(6, D_1)} = b^{(6, D_5)}$ et $b^{(6, D_2)} = b^{(6, D_4)}$.

Une conséquence importante de l'expression des $b^{(l, D_k)}$ est qu'ils satisfont :

$$\boxed{\sum_{D_k \in C_l} b^{(l, D_k)} = b^{(l)}} . \quad (6.62)$$

Ainsi, la somme des l (non nécessairement distinctes) amplitudes $b^{(l, D_k)}$ au niveau l est égale à $b^{(l)}$. Cela avait été remarqué par Chang and Shrock [46], sauf qu'ils parlaient de la somme de

l amplitudes, et non l , car ils n'avaient pas remarqué que seules les permutations de C_l sont autorisées.

Il faut également noter que pour $l \geq 2$, la formule (6.61) peut s'écrire plus simplement comme :

$$b^{(l, D_k)} = \sum_{d_i | l} \frac{\tilde{b}^{(d_i)}}{l} \sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l), \quad (6.63)$$

étant donné que $b^{(l)} = \tilde{b}^{(l)}$ pour $l \geq 2$. Nous nous restreignons maintenant à ce cas, vu que les amplitudes aux niveaux 0 et 1 sont simplement $b^{(0)} = 1$ et $b^{(1)} = Q - 1$.

6.4.2 Formule compacte pour les amplitudes

Nous calculons maintenant les sommes de Ramanujan dans la formule (6.63). En utilisant l'Eq. (6.35), on obtient :

$$b^{(l, m)} = \sum_{d_i | l} \frac{\mu\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right) \phi\left(\frac{l}{d_i}\right)}{l \phi\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right)} \tilde{b}^{(d_i)}. \quad (6.64)$$

Nous rappelons que m est donné par $\frac{l}{d}$ pour k dans A_d , et est donc un diviseur entier de l . En utilisant l'expression des $\tilde{b}^{(d_i)}$ donnés dans l'Eq. (6.44), nous retrouvons la formule de Read et Saleur (6.7). En particulier, le terme $(-1)^l(Q-1)$ dans la définition (6.43) de $\tilde{b}^{(l)}$ correspond à des configurations d'amas dégénérées, i.e. contribue à Z_b .

Notons que le nombre d'amplitudes différentes au niveau l est simplement égal au nombre de diviseurs entiers de l . En particulier, si l est premier, il y a seulement deux amplitudes différentes : $b^{(l, 1)}$ qui correspond à $b^{(l, D_l)}$ (D_l est la représentation identité) et $b^{(l, l)}$ qui correspond aux $l-1$ autres $b^{(l, D_k)}$ (comme ils sont tous égaux). En utilisant que $b^{(1)} = -1$, on trouve :

$$b^{(l, 1)} = \frac{b^{(l)} - l + 1}{l} \quad (6.65)$$

$$b^{(l, l)} = \frac{b^{(l)} + 1}{l}. \quad (6.66)$$

Cela peut se voir directement en utilisant l'Eq. (6.63). En effet, pour l premier, C_l contient Id et $l-1$ cycles de longueur l . Comme $b^{(1)} = -1$, on en déduit que $b^{(l, 1)} = \frac{b^{(l)} - l + 1}{l}$. Pour $b^{(l, l)}$, il faut juste utiliser que $\sum_{k=1}^{l-1} \exp\left(\frac{i2\pi k}{l}\right) = -1$.

6.5 Conclusion de l'étude

Nous avons généralisé avec succès l'approche combinatoire exposée dans le chapitre 3 pour des CL cycliques au cas de CL toroïdales. Nous avons en particulier prouvé que la formule de Read et Saleur (6.7) est valable pour n'importe quels réseaux et températures. De plus, nous avons une interprétation physique nouvelle de leur formule, qui fait intervenir le groupe cyclique C_l .

Les amplitudes obtenues étant beaucoup plus compliquées que dans le cas cyclique, nous n'avons pas répondu à la question de savoir si les nombres de Beraha étaient toujours particuliers

en ce qui concerne le diagramme de phase du modèle. De plus, comme l'ont montré Chang et Shrock dans [46], il y a des dégénérescences entre niveaux différents, dépendant de la largeur L , ce qui complique encore le problème. Cela fera l'objet d'études futures [54].

Conclusion et perspectives

Nous avons mis en évidence au cours de ce mémoire la grande richesse des problèmes associés au modèle de Potts. Tout d'abord, nous avons considéré dans [5] des modèles de Potts couplés sur réseaux triangulaires. Nous avons établi dans le chapitre 1 les relations d'autodualité du modèle, de deux manières différentes : par une procédure de dualité suivie d'une décimation et par une procédure généralisant les travaux de Wu et Lin [7]. Nous avons, en utilisant des résultats de théorie conforme qui permettent d'interpréter les spectres des matrices de transfert, étudié le comportement critique correspondant dans le chapitre 2, et mis en évidence l'existence de nouveaux comportements, dans le cas de deux modèles couplés. Une voie intéressante, qui permettrait d'étudier le modèle de Potts désordonné à l'aide de la méthode des répliques, serait d'étudier un nombre plus grand de modèles couplés et d'en déduire des propriétés valables quel que soit ce nombre.

Dans le chapitre 3, nous avons donné une nouvelle méthode [51] permettant de développer en caractères la fonction de partition du modèle de Potts avec des CL cycliques. Ces caractères sont des fonctions de partition du modèle à six vertex avec un spin fixé. Notre méthode, purement combinatoire, a permis de retrouver les résultats algébriques de Pasquier et Saleur [16], qui étaient basés sur l'étude des représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb [26]. L'avantage de notre méthode est qu'elle s'étend facilement à la décomposition de fonctions de partition restreintes à un nombre d'amas non triviaux donné et au cas de CL cycliques/fixées. De plus, en généralisant cette méthode, nous avons également obtenu, dans le chapitre 6, des résultats intéressants pour des CL toroïdales [53]. En particulier, nous avons expliqué comment les permutations possibles entre points noirs levaient les dégénérescences entre amplitudes au sein d'un niveau donné. Il faut bien noter que les développements effectués sont valables pour n'importe quelle taille et température. Il est ainsi particulièrement amusant de vérifier à la main que ces développements sont valides pour des réseaux contenant très peu de sites. Ils constituent des extensions de résultats de théorie conforme des champs qui étaient a priori valables uniquement aux points critiques et dans la limite continue.

Dans [21], à l'aide des diagrammes de Pasquier [23] décrivant la topologie des configurations d'amas, nous avons établi des relations exactes entre le modèle de Potts et le modèle A_{p-1} pour des conditions aux limites toroïdales. Ces relations nous ont permis d'expliquer les coïncidences de valeurs propres entre les spectres des matrices de transfert des deux modèles. Ces relations pourraient d'ailleurs s'étendre, avec des modifications tenant compte du changement des poids des cycles dans les diagrammes de Pasquier, au cas des autres modèles ADE , pas seulement A_{p-1} . Une autre perspective intéressante serait d'interpréter le contenu en opérateurs des différentes matrices de transfert, notamment lorsqu'on *twiste* les modèles.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié le diagramme de phase du modèle de Potts lorsque Q

est un nombre de Beraha [42],[61]. Le développement de la fonction de partition du modèle de Potts avec CL cycliques se recombine pour faire intervenir des fonctions de partition du modèle RSOS avec CL cycliques/fixées. Cela a été interprété par Pasquier et Saleur à l'aide de la théorie de représentation du groupe quantique $U_q(sl(2))$ pour q racine de l'unité [16]. En utilisant ce développement et le théorème de Beraha-Kahane-Weiss [61], nous avons étudié dans [22] les zéros limites de la fonction de partition. Nous avons obtenu des résultats surprenants, et ce même pour le modèle d'Ising, où des branches partaient à l'infini ! Nous avons expliqué pourquoi le diagramme de phase est profondément modifié au niveau des nombres de Beraha, ce qui se traduit par la disparition de la phase de Berker-Kadanoff et l'apparition de nouveaux points fixes. Nous avons d'ailleurs conjecturé l'expression analytique de certains de ces points fixes, mais malheureusement pas de tous, l'étude proprement dite des zéros limites étant numérique. Il reste donc toujours le problème de déterminer précisément le nombre de nouveaux points fixes, ainsi que le flot de renormalisation entre eux.

De plus, le diagramme de phase semblait dépendre des conditions aux limites. En effet, pour x négatif, les poids dans la fonction de partition n'ont plus d'interprétation probabiliste, et donc une telle éventualité n'est pas à exclure. Cela a motivé une étude du modèle avec des conditions aux limites non plus cycliques mais toroïdales. Nous avons établi des développements de fonction de partition dans ce cas, et obtenu des résultats généraux sur les amplitudes des valeurs. Nous avons en particulier retrouvé la formule de Read et Saleur sur les amplitudes [130], mais pour un réseau quelconque et à n'importe quelle température. L'interprétation physique que nous en avons donnée est nouvelle et basée sur le groupe cyclique C_l . Les amplitudes obtenues étant plus compliquées que dans le cas cyclique, et des dégénérescences entre niveaux différents se produisant [46], nous n'avons pas étudié le diagramme de phase correspondant. Ainsi, nous n'avons pas répondu à la question de savoir si la phase de Berker-Kadanoff disparaît aux nombres de Beraha lorsque les conditions aux limites sont toroïdales. Cela fait l'objet de travaux en cours [54].

Appendice : méthode de la résultante

Nous donnons ici la méthode utilisée dans le chapitre 5 pour déterminer les températures x pour lesquelles il y a plusieurs valeurs propres dominantes de la matrice de transfert. Pour cela, on détermine les x tels qu'il y ait plusieurs valeurs propres équimodulaires en utilisant la méthode de la résultante, et on voit si elles sont dominantes ou non en calculant toutes les valeurs propres pour les x correspondants. Nous exposons dans cet appendice la méthode de la résultante, en suivant la présentation faite dans [14].

Définition de la résultante

La résultante $\text{Res}(P, Q)$ de deux polynômes $P(\lambda) = a_M \prod_{i=1}^M (\lambda - \lambda_i)$ et $Q(\mu) = b_N \prod_{j=1}^N (\mu - \mu_j)$ est défini, à un facteur près, comme le produit de toutes les différences des racines :

$$\text{Res}(P, Q) = a_M^N b_N^M \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N (\lambda_i - \mu_j) . \quad (6.67)$$

Ainsi, la résultante de P et Q est nulle si et seulement si P et Q ont au moins une racine en commun (en supposant ces polynômes non nuls).

Une propriété essentielle de la résultante est qu'elle est calculable à l'aide d'un déterminant de taille $(M + N) \times (M + N)$ faisant intervenir les coefficients de P et Q [86]. Il n'est ainsi pas nécessaire de connaître les expressions des racines $\{\lambda_i\}$ et $\{\mu_j\}$. Le déterminant est celui de la matrice de Sylvester de P et Q , obtenue en remplissant la première ligne par les coefficients de P , et en itérant cela pour les lignes suivantes avec un décalage d'une colonne à chaque fois, jusqu'à ce qu'on touche le côté droit. Ce processus est alors répété pour Q . Par exemple, la matrice de Sylvester de $P(x) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ et $Q(y) = b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} . \quad (6.68)$$

Définition du discriminant

Le discriminant $\text{Disc}(P)$ du polynôme $P(\lambda) = a_M \prod_{i=1}^M (\lambda - \lambda_i)$ est défini comme :

$$\text{Disc}(P) = a_M^{2M-2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (6.69)$$

On peut montrer que $\text{Disc}(P) = (-1)^{\frac{M(M-1)}{2}} a_M^{-1} \text{Res}(P, P')$. Le discriminant de P est nul si et seulement si P a au moins une racine multiple.

Principe de la méthode

Nous voulons savoir pour quelles valeurs de x la matrice de transfert $T(x)$ a des valeurs propres équimodulaires. On considère par conséquent le polynôme caractéristique de T défini par :

$$P(\lambda, x) = \det [\lambda I - T(x)] = \prod_{i=1}^{\dim T} [\lambda - \lambda_i(x)] , \quad (6.70)$$

ainsi que le polynôme $P_\theta(\lambda, x)$ défini par $P_\theta(\lambda, x) = P(\exp(i\theta)\lambda, x)$. P et P_θ ont une racine en commun si et seulement si T a des valeurs propres satisfaisant $\lambda_1 = \exp(i\theta)\lambda_2$. On détermine donc les lieux d'équimodularité en faisant parcourir à θ l'intervalle $(0, \pi]$, et en calculant pour chaque valeur de θ les racines de :

$$R_\theta(x) = \text{Res}_\lambda(P, P_\theta) , \quad (6.71)$$

qui est un polynôme en x et en θ .

Le cas $\theta = 0$ est particulier, car cela correspond à chercher les x pour lesquels P a des racines multiples. On calcule donc les zéros du discriminant de P , i.e. de $\text{Res}_\lambda(P, P')$.

Bibliographie

- [1] F. Y. Wu, The Potts model, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 235 (1982).
- [2] P. W. Kasteleyn and C. M. Fortuin, *J. Phys. Soc. Jap. (suppl.)* **26**, 11 (1969).
- [3] C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn, On the random cluster model : I. Introduction and relation to other models, *Physica* **57**, 536 (1972).
- [4] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Academic Press, New York, 1982).
- [5] J. F. Richard, J. L. Jacobsen, and M. Picco, Selfduality for coupled Potts models on the triangular lattice, *J. Phys. A* **37**, 4939, cond-mat/0402420 (2004).
- [6] J. L. Jacobsen, Duality relations for M coupled Potts models, *Phys. Rev. E* **62**, 1 (2000).
- [7] F. Y. Wu and K. Y. Lin, On the triangular Potts model with two-and three-site interactions, *J. Phys. A* **13**, 629 (1980).
- [8] A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys. B* **241**, 333 (1984).
- [9] C. Itzykson, and J. B. Zuber, Two-dimensional conformal invariant theories on a torus, *Nucl. Phys. B* **275**, 580 (1986).
- [10] A. Cappelli, C. Itzykson, and J. B. Zuber, Modular invariant partition functions in two dimensions, *Nucl. Phys. B* **280**, 445 (1987).
- [11] J. L. Cardy, Effect of the boundary conditions on the operator content of two-dimensional conformally invariant theories, *Nucl. Phys. B* **275**, 200 (1986).
- [12] J. L. Cardy, Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula, *Nucl. Phys. B* **324**, 581 (1989).
- [13] A. Zamolodchikov, Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2D field theory, *JETP Lett.* **43**, 730 (1986).
- [14] J. Salas, A. D. Sokal, Transfer Matrices and Partition-Function Zeros for Antiferromagnetic Potts Models I. General Theory and Square-Lattice Chromatic Polynomial, *J. Stat. Phys.* **104**, 609, cond-mat/0004330 (2001).
- [15] M. Henkel, *Conformal invariance and critical phenomena* (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [16] V. Pasquier and H. Saleur, Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups, *Nucl. Phys. B* **330**, 523 (1990).
- [17] H. Saleur, The antiferromagnetic Potts model in two dimensions : Berker-Kadanoff phase, antiferromagnetic transition, and the role of Beraha numbers, *Nucl. Phys. B* **360**, 219 (1991).

- [18] H. Saleur and M. Bauer, On some relations between local height probabilities and conformal invariance, Nucl. Phys. **B 320**, 591 (1989).
- [19] A. Nichols, The Temperley Lieb algebra and its generalizations in the Potts and XXZ models, J. Stat. Mech. **0601**, 003 (2006).
- [20] B. Duplantier and H. Saleur, Exact critical properties of two-dimensional dense self-avoiding walks, Nucl. Phys. **B 290**, 291 (1987).
- [21] J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Relations between Potts and RSOS models on a torus, Nucl. Phys. **B 731**, 335, math-ph/0507048 (2005).
- [22] J. L. Jacobsen, J. F. Richard and J. Salas, Complex-temperature phase diagram of Potts and RSOS models, Nucl. Phys. **B 743**, 153, cond-mat/0511059 (2005).
- [23] V. Pasquier, Lattice derivation of modular invariant partition functions on the torus, J. Phys. **A 20**, 1229 (1987).
- [24] D. A. Huse, Exact exponents for infinitely many new multicritical points, Phys. Rev. **B 30**, 3908 (1984).
- [25] G. E. Andrews, R. J. Baxter, and P. J. Forrester, Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities, J. Stat. Phys. **35**, 193 (1984).
- [26] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb, Relations between the 'Percolation' and 'Colouring' Problem and other Graph-Theoretical Problems Associated with Regular Planar Lattices : Some Exact Results for the 'Percolation' Problem, Proc. Roy. Soc. London **A 322**, 251 (1971).
- [27] H. W. J. Blöte and M. P. Nightingale, Critical behaviour of the two-dimensional Potts model with a continuous number of states ; A finite size scaling analysis, Physica **A 112**, 405 (1982).
- [28] R. J. Baxter, S. B. Kelland and F. Y. Wu, Equivalence of the Potts model or Whitney polynomial with an ice-type model, J. Phys. **A 9**, 397 (1976).
- [29] P. D. Francesco, H. Saleur and J. B. Zuber, Relations between the Coulomb gas picture and conformal invariance of two-dimensional critical models, J. Stat. Phys. **49**, 57 (1987).
- [30] P. D. Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [31] A. Rocha-Caridi, in S. Lepowski, S. Mandelstam and I. M. Singer (eds.), *Vertex operators in mathematics and physics*, MSRI Publications No. 3 (Springer, New York, 1985), p. 451.
- [32] I. Affleck, M. Oshikawa and H. Saleur, Boundary critical phenomena in the three-state Potts model, J. Phys. **A 31**, 5827 (1998).
- [33] C. N. Yang and T. D. Lee, Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation, Phys. Rev. **87**, 404 (1952).
- [34] R. B. Potts, Some generalized order-disorder transformations, Proc. Camb. Phil. Soc. **48**, 106 (1952).
- [35] E. Ising, The Theory of Ferromagnetism, Z. Phys. **21**, 613 (1925).
- [36] J. Ashkin and E. Teller, Statistics of Two-Dimensional Lattices with Four Components, Phys. Rev. **64**, 178 (1943).

- [37] R. J. Baxter, Critical Antiferromagnetic Square-Lattice Potts Model, Proc. Roy. Soc. London **A 383**, 43 (1982).
- [38] R. J. Baxter, H. N. V. Temperley and S. E. Ashley, Triangular Potts Model at its Transition Temperature, and Related Models, Proc. Roy. Soc. London **A 358**, 535 (1978).
- [39] R. J. Baxter, Potts model at the critical temperature, J. Phys. **C 6**, L445 (1973).
- [40] D. Kim and R. I. Joseph, Exact transition temperature of the Potts model with q states per site for the triangular and honeycomb lattices, J. Phys. **C 7**, L167 (1974).
- [41] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy and M. P. Nightingale, Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality, Phys. Rev. Lett. **56**, 742 (1986).
- [42] S. Beraha, J. Kahane, and N. J. Weiss, Limits of Zeroes of Recursively Defined Polynomials, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72**, 4209 (1975).
- [43] S.-C. Chang and R. Shrock, Transfer Matrices for the Partition Function of the Potts Model on Cyclic and Mobius Lattice Strips, Physica **A 347**, 314, cond-mat/0404524 (2005).
- [44] S.-C. Chang and R. Shrock, Transfer Matrices for the Zero-Temperature Potts Antiferromagnet on Cyclic and Mobius Lattice Strips, Physica **A 346**, 400, cond-mat/0404373 (2005).
- [45] S.-C. Chang and R. Shrock, Some Exact Results for Spanning Trees on Lattices, cond-mat/0602574 (2006).
- [46] S.-C. Chang and R. Shrock, Transfer Matrices for the Partition Function of the Potts Model on Toroidal Lattice Strips, cond-mat/0506274 (2005).
- [47] S.-C. Chang and R. Shrock, Ground State Entropy of the Potts Antiferromagnet on Triangular Lattice Strips, Annals Phys. **290**, 124, cond-mat/0004129 (2001).
- [48] M. Aizenman and E. H. Lieb, The third law of thermodynamics and the degeneracy of the ground state for lattice systems, J. Stat. Phys. **24**, 279 (1981).
- [49] Y. Chow and F. Y. Wu, Residual entropy and validity of the third law of thermodynamics in discrete spin systems, Phys. Rev. **B 36**, 285 (1987).
- [50] J. L. Jacobsen, J. Salas, and A. D. Sokal, Spanning forests and the q -state Potts model in the limit $q \rightarrow 0$, J. Stat. Phys. **119**, 1153, cond-mat/0401026 (2005).
- [51] J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Character decomposition of Potts model partition functions. I. Cyclic geometry, Nucl. Phys. **B 750**, 250, math-ph/0605016 (2006).
- [52] J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Character decomposition of Potts model partition functions. II. Toroidal geometry, Nucl. Phys. **B 750**, 229, math-ph/0605015 (2006).
- [53] J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Eigenvalue amplitudes of the Potts model on a torus, math-ph/0608055 (2006).
- [54] J. L. Jacobsen, J. F. Richard and J. Salas, VI. Chromatic polynomial with toroidal boundary conditions, to be published.
- [55] P. Martin, *Potts models and related problems in statistical mechanics* (World Scientific Publishing, Singapore, 1991).

- [56] J. L. Jacobsen and J. Salas, Transfer Matrices and Partition-Function Zeros for Antiferromagnetic Potts Models. IV. Chromatic polynomial with cyclic boundary conditions, *J. Stat. Phys.* **122**, 705, cond-mat/0407444 (2006).
- [57] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Nonlocal (parafermion) currents in two-dimensional conformal quantum field theory and self-dual critical points in Z_n -symmetric statistical systems, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **89**, 380 (1985).
- [58] A. N. Berker and L. P. Kadanoff, Ground-state entropy and algebraic order at low temperatures, *J. Phys. A* **13**, 259 (1980).
- [59] B. Nienhuis, H. J. Hilhorst, and H. W. J. Blote, Triangular SOS models and cubic-crystal shapes, *J. Phys. A* **17**, 3559 (1984).
- [60] H. W. J. Blote and H. J. Hilhorst, Roughening transitions and the zero-temperature triangular Ising antiferromagnet, *J. Phys. A* **15**, 631 (1982).
- [61] S. Beraha, J. Kahane, and N. J. Weiss, Limits of Chromatic Zeros of Some Families of Maps, *J. Comb. Theory Ser. B* **28**, 52 (1980).
- [62] A. M. Polyakov, Conformal symmetry of critical fluctuations, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **12**, 538 (1970).
- [63] R. Lipowsky, D. M. Kroll, and R. K. P. Zia, Effective field theory for interface delocalization transitions, *Phys. Rev. B* **27**, 4499 (1983).
- [64] H. Bethe, On the theory of metals, 1 Eigenvalues and eigenfunctions for the linear atomic chain, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
- [65] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Factorized S-matrices as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models, *Ann. Phys.* **120**, 253 (1979).
- [66] J. L. Cardy, Conformal invariance and critical surface behavior, *Nucl. Phys. B* **240**, 214 (1984).
- [67] J. L. Cardy, Operator content of two-dimensional conformally invariant theories, *Nucl. Phys. B* **270**, 186 (1986).
- [68] C. Gómez, M. Ruiz-Altaba, and G. Sierra, *Quantum Groups in Two-dimensional Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [69] M. Hamermesh, *Group theory and its applications to physical problems* (Addison-Wesley Publishing Company, London, 1962).
- [70] M. E. Fisher in W. E. Brittin (ed.), *Lectures in Theoretical Physics*, **VII C**, University of Colorado Press (Boulder, 1964).
- [71] T. Kihara, Y. Midzuno, and J. Shizume, Statistics of Two-Dimensional Lattices with Many Components, *J. Phys. Soc. Jpn.* **9**, 681 (1954).
- [72] V. Pasquier, Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams, *Nucl. Phys. B* **285**, 162 (1987).
- [73] R. Savit, Duality in field theory and statistical systems, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 453 (1980).
- [74] H. Kramers and G. Wannier, Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet, *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941).
- [75] M. P. Nightingale, Scaling theory and finite systems, *Physica* **83 A**, 561 (1975).

- [76] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 1 and vol. 2* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [77] N. J. A. Sloane, Sloane's On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>
- [78] R. Simion and D. Ullman, On the structure of the lattice of noncrossing partitions, *Discrete Math.* **98**, 193 (1991).
- [79] M. Klazar, On trees and noncrossing partitions, *Discrete Appl. Math.* **82**, 263 (1998).
- [80] S. Beraha and J. Kahane, Is the Four-Color Conjecture Almost False?, *J. Combin. Theory B* **27**, 1 (1979).
- [81] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.* **21**, 429 (1977).
- [82] K. Appel, W. Haken and J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.* **21**, 491 (1977).
- [83] B. L. Feigin and D. B. Fuchs, Invariant skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra, *Funct. Anal. and Appl.* **17**, 114 (1982).
- [84] D. Gepner and Z. Qiu, Modular invariant partition functions for parafermionic field theories, *Nucl. Phys. B* **285**, 423 (1987).
- [85] V. B. Petkova and J. B. Zuber, Generalised twisted partition functions, *Phys. Lett. B* **504**, 157 (2001).
- [86] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry* (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [87] R. Shrock, Exact Potts Model Partition Functions for Ladder Graphs, *Physica A* **283**, 388-446, *cond-mat/0001389* (2000).
- [88] S.-C. Chang and R. Shrock, Exact Potts Model Partition Functions on Strips of the Triangular Lattice, *Physica A* **286**, 189-238, *cond-mat/0004181* (2000).
- [89] S.-C. Chang and R. Shrock, Structural Properties of Potts Model Partition Functions and Chromatic Polynomials for Lattice Strips, *Physica A* **296**, 131-182, *cond-mat/0005232* (2001).
- [90] S.-C. Chang and R. Shrock, Exact Potts Model Partition Functions on Wider Arbitrary-Length Strips of the Square Lattice, *Physica A* **296**, 234-288, *cond-mat/0011503* (2001).
- [91] V. Dotsenko, J. L. Jacobsen, M.-A. Lewis, M. Picco, Coupled Potts models : Self-duality and fixed point structure, *Nucl. Phys. B* **546**, 505, *cond-mat/9812227* (1999).
- [92] J. L. Jacobsen, H. Saleur, The antiferromagnetic transition for the square-lattice Potts model, *Nucl. Phys. B* **743**, 207-248, *cond-mat/0512058* (2006).
- [93] H. Saleur, Zeroes of chromatic polynomials : A new approach to Beraha conjecture using quantum groups, *Commun. Math. Phys.* **132**, 657 (1990).
- [94] R. J. Baxter, q colourings of the triangular lattice, *J. Phys. A* **19**, 2821 (1986).
- [95] R. J. Baxter, Chromatic polynomials of large triangular lattices, *J. Phys. A* **20**, 5241 (1987).
- [96] J. Stephenson, Ising-Model Spin Correlations on the Triangular Lattice, *J. Math. Phys.* **5**, 1009 (1964).

- [97] A. Lenard, cited in E. H. Lieb, Phys. Rev. **162**, (1967) at pp. 169-170.
- [98] R. J. Baxter, Three-Colorings of the Square Lattice : A Hard Squares Model, Math. Phys. **11**, 3116 (1970).
- [99] R. J. Baxter, Colorings of a Hexagonal Lattice, Math. Phys. **11**, 784 (1970).
- [100] J. Kondev, J. de Gier, and B. Nienhuis, Operator spectrum and exact exponents of the fully packed loop model, J. Phys. **A 29**, 6489 (1996).
- [101] C. Itzykson, R. B. Pearson, and J. B. Zuber, Distribution of Zeros in Ising and Gauge Models, Nucl. Phys. **B 220**, 415 (1983).
- [102] G. Marchesini, R. Shrock, Complex-temperature Ising model : symmetry properties and behavior of correlation length and susceptibility, Nucl. Phys. **B 318**, 541 (1989).
- [103] V. Matveev, R. Shrock, Complex-Temperature Singularities of the Susceptibility in the $d = 2$ Ising Model I. Square Lattice, J. Phys. **A 28**, 1557, hep-lat/9408020 (1995).
- [104] V. Matveev, R. Shrock, Complex-Temperature Singularities in the $d = 2$ Ising Model II. Triangular Lattice, J. Phys. **A 29**, 803 hep-lat/9411023 (1996).
- [105] V. Matveev, R. Shrock, Complex-Temperature Singularities in the $d = 2$ Ising Model III. Honeycomb Lattice, J. Phys. **A 29**, 823, hep-lat/9412076 (1996).
- [106] V. Matveev, R. Shrock, Complex-Temperature Properties of the Ising Model on 2D Heteropolygonal Lattices, J. Phys. **A 28**, 5235, hep-lat/9503005 (1995).
- [107] J. Stephenson, and R. Couzens, Partition function zeros for the two-dimensional Ising model, Physica **129 A**, 201 (1984).
- [108] J. Stephenson, Partition function zeros for the two-dimensional Ising model II, Physica **136 A**, 147 (1986).
- [109] J. Stephenson, and J. Van Aalst, Partition function zeros for the two-dimensional Ising model III, Physica **136 A**, 160 (1986).
- [110] J. M. Maillard and R. Rammal, Some analytical consequences of the inverse relation for the Potts model, J. Phys. **A 16**, 353 (1983).
- [111] R. Rammal and J. M. Maillard, q -state Potts model on the checkerboard lattice, J. Phys. **A 16**, 1073 (1983).
- [112] J. M. Maillard and R. Rammal, S_4 -symmetry on the checkerboard Potts model, J. Phys. **A 18**, 833 (1985).
- [113] P. Martin and J. M. Maillard, Zeros of the partition function for the triangular lattice three-state Potts model, J. Phys. **A 19**, 547 (1986).
- [114] V. Matveev and R. Shrock, Complex-temperature singularities in Potts models on the square lattice, Phys. Rev. **E 54**, 6174 (1996).
- [115] P. Martin in G. M. d'Ariano, A. Montorsi and M. G. Rasetti (eds.), *Integrable Systems in Statistical Mechanics* (Singapore : World Scientific, 1985), p. 129.
- [116] W. van Saarloos and D. Kurtze, Location of zeros in the complex temperature plane : Absence of Lee-Yang theorem, J. Phys. **A 17**, 1301 (1984).
- [117] J. W. Essam, Percolation theory, Rep. Prog. Phys. **43**, 833 (1980).
- [118] M. J. Stephen, Site-cluster distributions and equation of state for the bond percolation model, Phys. Rev. **B 15**, 5674 (1977).

- [119] F. Y. Wu in G. C. Rota (ed.), *Studies in Foundations and Combinatorics* (Adv. in Math. Supp. Stud. , 1978), Vol. 1, p. 151.
- [120] L. Onsager, Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
- [121] L. Mittag and J. Stephen, Dual Transformations in Many-Component Ising Models, *J. Math. Phys.* **12**, 441 (1971).
- [122] F. Y. Wu and Y. K. Wang, Duality transformation in a many-component spin model, *J. Math. Phys.* **17**, 439 (1976).
- [123] M. Mezard, G. Parisi, and M. Virasoro *Spin glass theory and beyond* (World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 9, 1987).
- [124] M. A. Virasoro, Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models, *Phys. Rev. D* **1**, 2933 (1970).
- [125] S. Fubini, A. J. Hanson, and R. Jackiw, New approach to field theory, *Phys. Rev. D* **7**, 1932 (1973).
- [126] J. Riordan, Enumeration of plane trees by branches and endpoints, *J. Combin. Theory A* **19**, 214 (1975).
- [127] I. Affleck, Universal term in the free energy at a critical point and the conformal anomaly, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 746 (1986).
- [128] B. Nienhuis, Critical Behavior of Two-Dimensional Spin Models and Charge Asymmetry in the Coulomb Gas, *J. Stat. Phys.* **34**, 731 (1984).
- [129] L. P. Kadanoff, Lattice Coulomb gas representation of two-dimensional problems, *J. Phys. A* **11**, 1399 (1978).
- [130] N. Read and H. Saleur, Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimensions, *Nucl. Phys. B* **613**, 409 (2001).
- [131] P. Martin and H. Saleur, On an algebraic approach to higher dimensional statistical mechanics, *Commun. Math. Phys.* **158**, 155, hep-th/9208061 (1993).
- [132] P. Martin and H. Saleur, The Blob Algebra and the Periodic Temperley-Lieb Algebra, *Lett. Math. Phys.* **30**, 189, hep-th/9302094 (1994).
- [133] F. C. Alcaraz, U. Grimm, and V. Rittenberg, The XXZ Heisenberg chain, conformal invariance and the operator content of $c \leq 1$ systems, *Nucl. Phys. B* **316**, 735 (1989).
- [134] D. Levy, Algebraic structure of translation-invariant spin-1/2 xxz and q-Potts quantum chains, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1971 (1991).
- [135] F. C. Alcaraz and M. J. Martins, The spin- S XXZ quantum chain with general toroidal boundary conditions, *J. Phys. A* **23**, 1439 (1990).
- [136] U. Grimm and G. M. Schutz, *J. Stat. Phys.* **71**, 921, The spin-1/2 XXZ Heisenberg chain, the quantum algebra $U_q[sl(2)]$, and duality transformations for minimal models, hep-th/0111083 (1993).
- [137] J. H. van Lint and R. M. Wilson *A Course in Combinatorics* (Cambridge University, Cambridge, 1992).
- [138] G. H. Hardy and E. M. Wright *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford science publications, New-York, 1979).

ARTICLES

J. F. Richard, J. L. Jacobsen, and M. Picco, Selfduality for coupled Potts models on the triangular lattice, J. Phys. **A** **37**, 4939, cond-mat/0402420 (2004).

J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Relations between Potts and RSOS models on a torus, Nucl. Phys. **B** **731**, 335, math-ph/0507048 (2005).

J. L. Jacobsen, J. F. Richard and J. Salas, Complex-temperature phase diagram of Potts and RSOS models, Nucl. Phys. **B** **743**, 153, cond-mat/0511059 (2005).

J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Character decomposition of Potts model partition functions. I. Cyclic geometry, Nucl. Phys. **B** **750**, 250, math-ph/0605016 (2006).

J. F. Richard and J. L. Jacobsen, Eigenvalue amplitudes of the Potts model on a torus, math-ph/0608055 (2006).

Selfduality for coupled Potts models on the triangular lattice

Jean-François Richard^{*,†}, Jesper Lykke Jacobsen^{*}, and Marco Picco[†]

^{*}*LPTMS, Université Paris-Sud, Bâtiment 100, 91405 Orsay, France and*

[†]*LPTHE, Université Paris VI, Tour 16, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

(Dated: August 24, 2006)

We present selfdual manifolds for coupled Potts models on the triangular lattice. We exploit two different techniques: duality followed by decimation, and mapping to a related loop model. The latter technique is found to be superior, and it allows to include three-spin couplings. Starting from three coupled models, such couplings are necessary for generating selfdual solutions. A numerical study of the case of two coupled models leads to the identification of novel critical points.

PACS numbers: 05.50.+q, 05.20.-y

I. INTRODUCTION

The two-dimensional Potts model is a well-studied model of statistical mechanics [1] and continues to attract the interest of many workers. Its definition is simple. Given a lattice with vertices $\{i\}$ and edges $\langle ij \rangle$, the Hamiltonian reads

$$\beta H = -K \sum_{\langle ij \rangle} \delta(S_i, S_j), \quad (1)$$

where δ is the Kronecker delta. The spins $S_i = 1, 2, \dots, q$ initially take q discrete values. However, by making a random cluster expansion [2] it is easily seen that the partition function can be written

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} b^{e(\mathcal{C})} q^{n(\mathcal{C})}, \quad (2)$$

where $b = e^K - 1$. Here, the sum is over the $2^{|\langle ij \rangle|}$ possible colourings \mathcal{C} of the edges (each edge being either coloured or uncoloured), $e(\mathcal{C})$ is the number of coloured edges, and $n(\mathcal{C})$ is the number of connected components (clusters) formed by the coloured edges. Taking Eq. (2) as the *definition* of the Potts model, it is clear that q can now be considered as a real variable, independently of the original spin Hamiltonian. Also, we shall adopt the point of view that Eq. (2) makes sense for any real b , although $b < -1$ would correspond to an unphysical (complex) value of the spin coupling K .

Exact evaluations of Eq. (2), in the sense of the Bethe Ansatz, exist for several lattices and for specific curves in (q, b) space along which the model happens to be integrable [3]. This is true, in particular, for the square lattice with [3, 4]

$$b = \pm\sqrt{q}, \quad (3)$$

$$b = -2 \pm \sqrt{4 - q}, \quad (4)$$

and for the triangular lattice with [5]

$$b^3 + 3b^2 = q. \quad (5)$$

These curves have several features in common. First, they correspond to critical points (with correlation functions decaying as power laws) for $0 \leq q \leq 4$ [6], whose nature can be classified using conformal field theory (CFT) [7]. Second, the values of the coupling constants are often so that the partition function is selfdual (see below); this is the case for the curves (3) and (5) above, whereas the two curves in (4) are mutually dual.

The part of the curves having $b > 0$ corresponds to the ferromagnetic phase transition, whose critical behaviour is lattice independent (universal). More interestingly, the antiferromagnetic ($-1 \leq b < 0$) and unphysical regimes ($b < -1$) contain non-generic critical points whose relation to CFT has, at least in some cases, not been fully elucidated. This is so in particular for $b = -1$, where the Potts model reduces to a colouring problem, and Eq. (2) becomes the chromatic polynomial.

Much less is known about several Potts models, coupled through their energy density $\delta(S_i, S_j)$. Results coming from integrability seem to be limited to the case of $N = 2$ coupled models [8], which on the square lattice only leads to new critical points in the well-studied Ashkin-Teller case [3] (i.e., with $q = 2$). Apart from that, CFT-related

results are essentially confined to perturbative expansions in $\epsilon \sim q - 2$ around the ferromagnetic critical point [9, 10]. These results, corroborated by numerical evidence [11, 12], indicate the existence of novel critical points for $N \geq 3$, with possible implications for the random-bond Potts model through the formal analytical continuation (replica limit) $N \rightarrow 0$.

In the present publication we investigate the possibility of novel critical behaviour in N coupled Potts models on the triangular lattice. To identify candidate critical points we first search for selfdual theories. In comparison with a similar study on the square lattice [11, 12] several distinctive features emerge due to the non-selfdualness of the lattice. This leads us to use two different techniques. In the first, a standard duality transformation is followed by decimation (star-triangle transformation). This turns out to be quite cumbersome, already for $N = 2$. We therefore turn to a second technique, which utilises a mapping to a system of coupled loop models. This leads to simpler relations, and as a bonus allows to include three-spin couplings around one half of the lattice faces. Starting from $N = 3$ coupled models, such additional couplings are actually necessary for generating non-trivial selfdual solutions.

For $N = 2$ we numerically investigate the non-trivial selfdual manifold. Following the motivation given above, the main interest here is to establish whether a given selfdual point corresponds to a renormalisation group fixed point (and possibly even to a critical fixed point). We shall see that these expectations are indeed born out: the numerics is compatible with critical points whenever $0 \leq q \leq 4$. Measuring the central charge, we identify the corresponding universality classes. These can in some cases be understood from those of a single model, but we also identify points possessing novel critical behaviour.

The paper is laid out as follows. In Section II we present the technique of duality followed by decimation for two coupled models with pure two-spin interactions. In particular, we find a non-trivial selfdual solution. The mapping to a loop model, given in Section III, allows to rederive this solution in a much simpler way, and to generalise to the case where three-spin interactions are included. In Section IV we use this technique to treat the case of three coupled models with both two and three-spin interactions. A numerical study of the non-trivial selfdual solution found in Section II is the object of Section V. Finally, Section VI is devoted to our conclusions.

II. MODELS WITH TWO-SPIN INTERACTIONS

To illustrate the first technique (duality and decimation), we consider the case of $N = 2$ coupled models with two-spin interactions. In order to simplify the notation, we introduce the symbol $\delta_{ij}^\mu = \delta(S_i^\mu, S_j^\mu)$, where the superscript refers to the spins of the μ 'th model ($\mu = 1, 2, \dots, N$). We are interested in the coupled model defined by the Hamiltonian

$$\beta H_2 = - \sum_{\langle ij \rangle} \{ K_1 \delta_{ij}^1 + K_2 \delta_{ij}^2 + K_{12} \delta_{ij}^1 \delta_{ij}^2 \}. \quad (6)$$

The spins S_i^μ take q_μ different values.

A. Duality followed by decimation

As shown in Ref. [12, 13], Eq. (6) admits a (generalised) random cluster expansion resulting in

$$Z = \sum_{C_1, C_2} b_1^{e(C_1 \cap \overline{C_2})} b_2^{e(\overline{C_1} \cap C_2)} b_{12}^{e(C_1 \cap C_2)} q_1^{n(C_1)} q_2^{n(C_2)}, \quad (7)$$

where C_μ are independent colourings of the μ 'th model, and we have defined the complementary colouring $\overline{C_\mu} \equiv \langle ij \rangle - C_\mu$. The new parameters b are related to the coupling constants K through

$$b_\mu = e^{K_\mu} - 1, \quad b_{12} = e^{K_1 + K_2 + K_{12}} - e^{K_1} - e^{K_2} + 1 \quad (8)$$

As explained in the Introduction, we shall take the point of view that the model is *defined* by Eq. (7) for any real values of b and q_μ .

Up to an irrelevant constant, the partition function of the dual model is again given by (7), but now with respect to the dual (hexagonal) lattice, and with dual values \tilde{b} of the parameters [12, 13]:

$$\tilde{b}_1 = \frac{b_2 q_1}{b_{12}}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{b_1 q_2}{b_{12}}, \quad \tilde{b}_{12} = \frac{q_1 q_2}{b_{12}}. \quad (9)$$

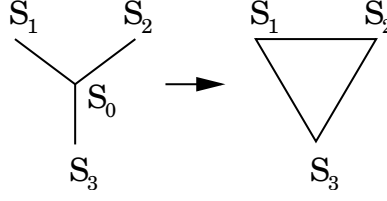


FIG. 1: The star-triangle transformation.

A rather obvious procedure would be to follow (9) by a standard decimation prescription (star-triangle transformation) in order to get back to parameters b' defined with respect to the triangular lattice, and then search for selfdual solutions, $b = b'$. A key assumption, of course, is that such solutions exist within the original parameter space, i.e., with only nearest-neighbour couplings among the spins [14].

The precise setup is shown in Fig. 1. We form the partial trace over all spins S_0^μ situated at even (Y -shaped) vertices of the hexagonal lattice, while keeping the exterior spins $S_1^\mu, S_2^\mu, S_3^\mu$ fixed. Defining \tilde{b} as in Eq. (8), we must have

$$\sum_{S_0^1, S_0^2} \exp \left\{ \sum_{i=1}^3 \left(\tilde{K}_\mu \sum_{\mu=1}^2 \delta_{0i}^\mu + \tilde{K}_{12} \delta_{0i}^1 \delta_{0i}^2 \right) \right\} = A \exp \left\{ \sum_{i>j=1}^3 \left(K'_\mu \sum_{\mu=1}^2 \delta_{ij}^\mu + K'_{12} \delta_{ij}^1 \delta_{ij}^2 \right) \right\}, \quad (10)$$

where the proportionality factor A does not have any bearing on the duality relations for the coupling constants.

We obtain ten distinct relations by considering all symmetry-unrelated choices for the fixed spins S_i^μ with $\mu = 1, 2$ and $i = 1, 2, 3$. Following [14] we suppose $q_\mu \geq 3$ integer initially, and then invoke analytic continuation to claim the validity of the result for arbitrary q_μ .

- For $S_1 \neq S_2 \neq S_3$ on the two lattices:

$$(q_1 - 3)(q_2 - 3) + 3(1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12}) + 3(q_2 - 3)(1 + \tilde{b}_1) + 3(q_1 - 3)(1 + \tilde{b}_2) + 6(1 + \tilde{b}_1)(1 + \tilde{b}_2) = A \quad (11)$$

- For $S_1 = S_2 = S_3$ on the two lattices:

$$(q_1 - 1)(q_2 - 1) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})^3 + (q_2 - 1)(1 + \tilde{b}_1)^3 + (q_1 - 1)(1 + \tilde{b}_2)^3 = A(1 + b'_1 + b'_2 + b'_{12})^3 \quad (12)$$

- For $S_1 = S_2 \neq S_3$ on the two lattices:

$$(q_1 - 2)(q_2 - 2) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})^2 + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12}) + (q_2 - 2)(1 + \tilde{b}_1)^2 + (q_1 - 2)(1 + \tilde{b}_2)^2 + (q_2 - 2)(1 + \tilde{b}_1) + (q_1 - 2)(1 + \tilde{b}_2)(1 + \tilde{b}_1)^2(1 + \tilde{b}_2) + (1 + \tilde{b}_2)^2(1 + \tilde{b}_1) = A(1 + b'_1 + b'_2 + b'_{12}) \quad (13)$$

- For $S_1^1 = S_2^1 \neq S_3^1$ and $S_1^2 \neq S_2^2 = S_3^2$:

$$(q_1 - 2)(q_2 - 2) + (q_2 - 2)(1 + \tilde{b}_1)^2 + (q_2 - 2)(1 + \tilde{b}_1) + (q_1 - 2)(1 + \tilde{b}_2)^2 + (q_1 - 2)(1 + \tilde{b}_2) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})(1 + \tilde{b}_1)(1 + \tilde{b}_2) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})(1 + \tilde{b}_1) + (1 + \tilde{b}_1)(1 + \tilde{b}_2) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})(1 + \tilde{b}_2) = A(1 + b'_1)(1 + b'_2) \quad (14)$$

- For $S_1^1 = S_2^1 = S_3^1$ and $S_1^2 \neq S_2^2 \neq S_3^2$:

$$(q_1 - 1)(q_2 - 3) + (q_2 - 3)(1 + \tilde{b}_1)^3 + 3(q_1 - 1)(1 + \tilde{b}_2) + 3(1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})(1 + \tilde{b}_1)^2 = A(1 + b'_1)^3 \quad (15)$$

- For $S_1^1 = S_2^1 = S_3^1$ and $S_1^2 = S_2^2 \neq S_3^2$:

$$(q_2 - 2)(q_1 - 1) + (q_1 - 1)(1 + \tilde{b}_2)^2 + (q_1 - 1)(1 + \tilde{b}_2) + (q_2 - 2)(1 + \tilde{b}_1)^3 + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})^2(1 + \tilde{b}_1) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})(1 + \tilde{b}_1)^2 = A(1 + b'_1 + b'_2 + b'_{12})(1 + b'_1)^2 \quad (16)$$

- For $S_1^1 = S_2^1 \neq S_3^1$ and $S_1^2 \neq S_2^2 \neq S_3^2$:

$$(q_1 - 2)(q_2 - 3) + (q_2 - 3)(1 + \tilde{b}_1)^2 + (q_2 - 3)(1 + \tilde{b}_1) + (q_1 - 2)3(1 + \tilde{b}_2) + 2(1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12})(1 + \tilde{b}_1) + (1 + \tilde{b}_1)^2(1 + \tilde{b}_2) + (1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_{12}) + 2(1 + \tilde{b}_1)(1 + \tilde{b}_2) = A(1 + b'_1) \quad (17)$$

- Eqs. (15), (16) and (17) each represent a pair of relations of which we have only written one representative; the other one is obtained by permuting the two models, i.e., by letting $q_1 \leftrightarrow q_2$ and $b_1 \leftrightarrow b_2$.

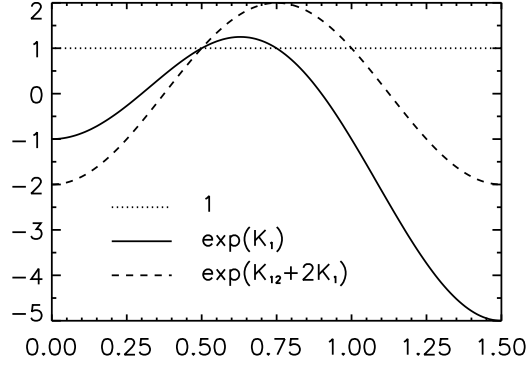


FIG. 2: Variation of the Boltzmann weights (20) with the parameter g defined in Eq. (19).

B. General structure of trivial solutions

The list of selfdual solutions of N coupled models, $\mu = 1, 2, \dots, N$, will in general contain a certain number of trivial solutions. By a trivial solution we mean one which is a consequence of the selfduality of a single model. Let us discuss in detail two classes [12, 13] of trivial solutions:

1. The models are actually decoupled. This happens, e.g., in the above example with $N = 2$ when $K_{12} = 0$, that is $b_{12} = b_1 b_2$. We will then have $b_\mu^3 + 3b_\mu^2 = q_\mu$ for each μ , cf. Eq. (5). The number of real solutions of the μ 'th equation is $n_\mu = 3$ when $0 < q_\mu < 4$, $n_\mu = 2$ when $q_\mu = 0$ or $q_\mu = 4$, and $n_\mu = 1$ otherwise; there will therefore be $n = \prod_{\mu=1}^N n_\mu$ trivial solutions for the system of N decoupled models.
2. The models couple strongly so as to form a *single* $q = \prod_{\mu=1}^N q_\mu$ state model. This happens when only the coupling constant involving all the models is nonzero. E.g., in the above example with $N = 2$, one would have $K_1 = K_2 = 0$, that is $b_1 = b_2 = 0$. The number of such solutions equals the number of real solutions of Eq. (5), with b replaced by b_{12} .

The goal of our study is to show that there exists selfdual solutions of coupled Potts models on the triangular lattice which are *not* trivial in the above sense.

C. Non-trivial solutions

Let us return to the Hamiltonian (6). We have numerically solved the ten relations (11)–(17) for several different values of q_1 and q_2 . The conclusion is that for $q_1 \neq q_2$ only trivial solutions exist.

For $q_1 = q_2$ the situation is different. There are now only seven distinct relations (11)–(17), since the three relations which formerly occurred in pairs will now collapse into single relations. The parameters b are thus less constrained, and accordingly we find non-trivial solutions. Numerically we find that these solutions have $b_1 = b_2$ (but note that there are still trivial solutions with $K_{12} = 0$ which break this symmetry).

Setting now $q \equiv q_1 = q_2$ and $b_1 = b_2$ we can obtain the non-trivial solutions analytically, e.g., by solving Eqs. (11), (13) and (17) for A , b_1 and b_{12} , and verifying that the found solution satisfies all the other relations. The result is:

$$b_1^3 + 6b_1^2 + 3b_1 q + q(q - 2) = 0, \quad b_{12} = \frac{q - b_1^2}{2 + b_1}. \quad (18)$$

For each $q \in (0, 4)$ Eq. (18) admits three distinct solution for b_1 . To make clear in the following exactly to which solution we are referring, it is convenient to recast (18) in parametric form, by setting $q = 4 \cos^2(\pi g)$. When the parameter g runs through the interval $[0, \frac{3}{2}]$, the number of states q runs through the interval $[0, 4]$ three times. We have then

$$b_1 = x(1 - x), \quad b_{12} = (x - 1)^2, \quad x \equiv 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}g\right). \quad (19)$$

This parametrisation also has the advantage over (18) that it is non-singular as $g \rightarrow 1$ (i.e., $x \rightarrow -1$ and $q \rightarrow 4$) and yields the correct limiting values of b_1 and b_{12} .

In terms of x , the Boltzmann weights for two neighbouring spins being identical in none, one, or both of the two models read:

$$1, \quad e^{K_1} = 1 + x - x^2, \quad e^{K_{12}+2K_1} = 2 - x^2. \quad (20)$$

Their variation with g is shown in Fig. 2. Note that the K_{12} coupling is physical ($e^{K_{12}} \geq 0$) for $\frac{3}{8} \leq g \leq \frac{9}{8}$, and that K_1 is physical for $\frac{3}{10} \leq g \leq \frac{9}{10}$.

It is also interesting to remark that in the x -parametrisation, Eq. (5) for a single model reads $b = x - 1$; the trivial solution of type 1 is then $b_1 = x - 1$, $b_{12} = (b_1)^2$ with the *same* value of b_{12} as in Eq. (19).

D. Special points on the curve (19)

Let us remark on a few special values of the parameter g for which the physics of the two coupled models can be related to that of a single model.

1. For $g = 1$ (i.e., $q = 4$ and $x = -1$) one has $K_{12} = 0$, whence the models are decoupled.
2. For $g = \frac{3}{4}$ (i.e., $q = 2$ and $x = 0$) one has $K_1 = 0$ and $K_{12} = \log 2$. Thus, the two models couple strongly to form a single $q^2 = 4$ state model at the ferromagnetic fixed point.
3. For $g = \frac{1}{2}$ (i.e., $q = 0$ and $x = 1$) one has $K_1 = K_{12} = 0$. This is an infinite-temperature limit, whose properties depend on the ratio K_1/K_{12} as $g \rightarrow \frac{1}{2}$. In fact, for $x \rightarrow 1$ we find $K_1 \sim (1-x)$ and $K_{12} \sim 2(1-x)^3$, whence the coupling between the two models is negligible. Note also that $q \sim 3(1-x)^2$, whence the point $(q, b_1) = (0, 0)$ is approached with infinite slope, as is the case for a single Potts model *along* the selfdual curve (5).

Note also that these values of g correspond to degeneracies of the Boltzmann weights (20), cf. Fig. 2.

As to the critical behaviour of a single Potts model, the situation is well understood in the case of the square lattice [7]. There are three critical phases, referred to as ferromagnetic, Berker-Kadanoff and antiferromagnetic in Ref. [7]. By universality, one would expect the same three critical phases to describe the distinct branches of the selfdual curve (5), as is confirmed by numerical transfer matrix results [16]. In particular, for the central charge along (5) one has

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6g^2}{1-g}, & \text{for } 0 \leq g < \frac{1}{2} & \quad (\text{ferromagnetic phase}) \\ c &= 1 - \frac{6g^2}{1-g}, & \text{for } \frac{1}{2} \leq g < 1 & \quad (\text{Berker-Kadanoff phase}) \\ c &= 2 - 6(g-1), & \text{for } 1 < g \leq \frac{3}{2} & \quad (\text{antiferromagnetic phase}) \end{aligned} \quad (21)$$

when parametrising $q = 4 \cos^2(\pi g)$ as in (19). Note that points $(q, b_1) = (0, 0)$ and $(q, b_1) = (4, -2)$ are special, and the critical behaviour when approaching the curve (5) at these points depends on the exact prescription for taking the limit.

We conclude that the above-mentioned special points on the selfdual curve (19) for two coupled models lead to the central charges $c = -4$ for $g = \frac{1}{2}$ and $c = 1$ for $g = \frac{3}{4}$. For $g \rightarrow 1$, the result is for the moment uncertain, due to the ambiguity in taking the limit just referred to.

III. TWO AND THREE-SPIN INTERACTIONS

The results of the preceding section can be generalised to a model defined by the Hamiltonian $H = H_2 + H_3$. The term H_2 is as in Eq. (6), whereas H_3 introduces interactions between the three spins around the up-pointing faces $\langle ijk \rangle$ of the triangular lattice, as shown in Fig. 3:

$$\beta H_3 = - \sum_{\langle ijk \rangle} \{ L_1 \delta_{ijk}^1 + L_2 \delta_{ijk}^2 + L_{12} \delta_{ijk}^1 \delta_{ijk}^2 \}. \quad (22)$$

Introducing such interactions around *every* face seems difficult, even in the case of a single model [1].

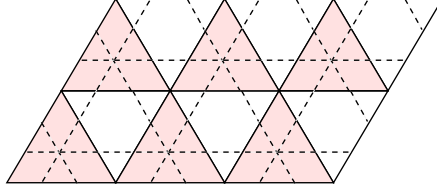


FIG. 3: The lattice of Potts spins is shown in solid linestyle. There are two-spin interactions along every edge, and three-spin interactions among the spins surrounding the up-pointing faces (shaded). The loop model is defined on a shifted triangular lattice, shown in dashed linestyle.

One could of course consider also interactions between two spins in one model and three spins in the other. It can be verified that the method given below can be adapted to this case. However, we have chosen not to consider any further such mixed interactions.

In the following it is convenient to introduce the parameters

$$y_\mu = e^{L_\mu} - 1, \quad y_{12} = e^{L_{12}+L_1+L_2} - e^{L_1} - e^{L_2} + 1 \quad (23)$$

in analogy with Eq. (8). Guided by our results without three-spin interactions, we shall assume in the following that non-trivial selfdual solutions only exist when coupling identical models. Thus we restrict the study to $q \equiv q_1 = q_2$, $b_1 = b_2$ and $L_1 = L_2$.

A. Mapping to a fully-packed loop model

Wu and Lin [15] have shown how to produce duality relations for a single Potts model with two- and three-spin interactions, by mapping it to a related loop model. After briefly reviewing their method, we shall adapt it to the case of coupled models.

In Fig. 3 we show the triangular lattice of Potts spins, and the shifted triangular lattice on which the loop model is defined. To obtain the correspondence, one first rewrites the Boltzmann weight around an up-pointing triangle $\langle ijk \rangle$ as

$$w_{ijk} = f_1 \delta_{ij} + f_2 \delta_{jk} + f_3 \delta_{ik} + f_4 + f_5 \delta_{ijk} \equiv \sum_{a=1}^5 f_a \delta_a, \quad (24)$$

where $\delta_1 \equiv \delta_{ij} = \delta(S_i, S_j)$ etc. Note that $f_4 = 1$. To each of the five terms in this sum is associated a link diagram on $\langle ijk \rangle$, as shown in the first line of Fig. 4, indicating which spins participate in the delta symbol. The partition function is then

$$Z_{\text{Potts}} = \sum_{S_i} \prod_{\langle ijk \rangle} w_{ijk} = \sum_{\mathcal{L}} q^{n(\mathcal{L})} \prod_{a=1}^5 f_a^{n_a(\mathcal{L})}, \quad (25)$$

where the sum is over all link diagrams \mathcal{L} for the whole lattice, $n(\mathcal{L})$ is the number of connected components in \mathcal{L} , and $n_a(\mathcal{L})$ is the number of up-pointing triangles whose link diagram is of type $a = 1, 2, \dots, 5$.

The link diagrams are now mapped to fully-packed loop configurations on a shifted triangular lattice (cf. Fig. 3) via the correspondence given in the second line of Fig. 4. The partition function of the loop model is defined as

$$Z_{\text{loop}} = \sum_{\mathcal{L}'} z^{p(\mathcal{L}')} \prod_{a=1}^5 c_a^{n_a(\mathcal{L}')}, \quad (26)$$

where $p(\mathcal{L}')$ is the number of closed polygons (loops) in the loop configuration \mathcal{L}' (which is in one-to-one correspondence with \mathcal{L} using Fig. 4), and z is the fugacity of a polygon. Using now the Euler relation one finds that $Z_{\text{Potts}} = Z_{\text{loop}}$ if $z = \sqrt{q}$, $c_a = f_a$ for $a = 1, 2, 3$, $c_4 = q^{1/2} f_4$, and $c_5 = q^{-1/2} f_5$ [15].

Finally, the duality relation follows from the invariance of the loop model under $\pi/3$ rotations; notice that this cyclically interchanges the link diagrams of types 1, 2, 3 and permutes the diagrams of type 4, 5.

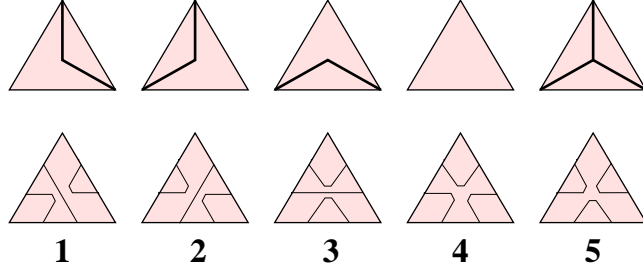


FIG. 4: Correspondence between link diagrams \mathcal{L} for the Potts model (first line) and vertices \mathcal{L}' of the fully-packed loop model (second line).

B. $N = 2$ and mapping to coupled loop models

The above mapping can be adapted to the case of N coupled models. We here consider $N = 2$. The Boltzmann weight w_{ijk} around an up-pointing triangle $\langle ijk \rangle$ can be written in a form generalising (24):

$$w_{ijk} = \sum_{a,b=1}^5 f_{ab} \delta_a^1 \delta_b^2; \quad (27)$$

as usual δ^μ refers to the μ 'th model. As the two models are identical, we have the symmetry $f_{ab} = f_{ba}$. When $L_1 = L_2 = L_{12} = 0$, the couplings are denoted f_{ab}^0 ; they are related to the b through

$$\begin{aligned} f_{ii}^0 &= b_{12}, \\ f_{ij}^0 &= b_1^2, \\ f_{i4}^0 &= b_1, \\ f_{i5}^0 &= b_{12}(b_1^2 + 2b_1) + b_1^3, \\ f_{44}^0 &= 1, \\ f_{45}^0 &= b_1^3 + 3b_1^2, \\ f_{55}^0 &= b_{12}^3 + 3b_{12}^2(1 + 2b_1) + 6b_{12}b_1^2, \end{aligned} \quad (28)$$

where $i \neq j$ are any numbers in $\{1, 2, 3\}$. In the general case ($L \neq 0$) we then have

$$\begin{aligned} f_{14} &= f_{14}^0, \\ f_{15} &= f_{15}^0 + y_1(f_{11}^0 + 2f_{12}^0 + f_{14}^0 + f_{15}^0), \\ f_{44} &= f_{44}^0, \\ f_{55} &= f_{55}^0 + 2y_1(3f_{15}^0 + f_{45}^0 + f_{55}^0) + y_{12}(3f_{11}^0 + 6f_{12}^0 + 6f_{14}^0 + 6f_{15}^0 + f_{44}^0 + 2f_{45}^0 + f_{55}^0); \end{aligned} \quad (29)$$

note that we here only give the f_{ab} needed in the duality relation (33) below.

The Potts model partition function reads

$$Z_{\text{Potts}} = \sum_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} q^{n(\mathcal{L}_1) + n(\mathcal{L}_2)} \prod_{a,b=1}^5 f_{ab}^{n_{ab}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)}. \quad (30)$$

Here, $n_{ab}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ is the number of up-triangles where model 1 is in the link state a and model 2 is in the link state b . On the other hand, we can define a coupled loop model through

$$Z_{\text{loop}} = \sum_{\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2} z^{p(\mathcal{L}'_1) + p(\mathcal{L}'_2)} \prod_{a,b=1}^5 c_{ab}^{n_{ab}(\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2)}. \quad (31)$$

The equivalence between the two goes through as before. Using the Euler relation, one finds $Z_{\text{Potts}} = Z_{\text{loop}}$ provided that $z = \sqrt{q}$ and that

$$c_{ab} = q^{(\delta_{a,4} + \delta_{b,4} - \delta_{a,5} - \delta_{b,5})/2} f_{ab}. \quad (32)$$

It should now be obvious how the mapping generalises to an arbitrary number of coupled models. One has $c_{ab\dots} = q^{(N_4 - N_5)/2} f_{ab\dots}$, where N_4 (resp. N_5) counts the number of indices equal to 4 (resp. 5).

The selfduality criterion is again obtained by requiring invariance of Z_{loop} under $\pi/3$ rotations. This means that the c_{ab} are invariant under independent permutations of the indices $\{1, 2, 3\}$ and of $\{4, 5\}$. We also recall the invariance under a permutation of the two models, $c_{ab} = c_{ba}$. Actually, since the two Potts model were taken to be identical and isotropic from the outset, the only non-trivial selfduality criteria are:

$$c_{44} = c_{55}, \quad c_{14} = c_{15}. \quad (33)$$

C. Selfdual solutions

We now wish to express the condition of selfduality in terms of the parameters b and y , cf. Eqs. (8) and (23).

When three-spin interactions are absent ($L = 0$), the relations (33) immediately yield the solutions given in Sec. II C. This is a remarkable simplification when compared to solving the system of relations (11)–(17); indeed many of these relations turn out to be dependent.

When $L \neq 0$, Eq. (33) still gives the complete solution to the selfduality problem, but it does not generically lead to simple expressions in terms of the parameters b and y . We therefore concentrate on a few remarkable solutions. As before, there are two types of trivial solutions:

1. Trivial decoupled solution ($K_{12} = L_{12} = 0$, or $b_{12} = b_1^2$ and $y_{12} = y_1^2$). One finds the selfduality criterion of a *single* model [5, 15]

$$b_1^3 + 3b_1^2 - q + y_1(1 + b_1)^3 = 0. \quad (34)$$

2. Trivial strongly coupled solution ($K_1 = L_1 = 0$, or $b_1 = y_1 = 0$). We find

$$b_{12}^3 + 3b_{12}^2 - q^2 + y_{12}(1 + b_{12})^3 = 0. \quad (35)$$

This is just the selfduality criterion of a single q^2 state model.

Some noteworthy non-trivial solutions can be found by giving particular values to b_1 , y_1 or y_{12} :

1. For $y_1 = 0$ (i.e., $L_1 = 0$), there is only one non-trivial solution:

$$(b_1^3 + 6b_1^2 + 3qb_1 + q(q - 2))(b_1^3 + 3b_1^2 - q) = y_{12}(b_1^2 + 5b_1 + q + 2)^3, \quad b_{12} = \frac{q - b_1^2}{2 + b_1}. \quad (36)$$

Note that when $y_{12} = 0$, the factorisation of the left-hand side allows us to retrieve either (18) or the trivial solution (34).

2. For $y_{12} = y_1^2$ (i.e., $L_{12} = 0$), there is a solution of the form:

$$b_1 = -\frac{q}{2}, \quad b_{12} = -\frac{q^2}{2} + 3q - 3, \quad y_1 = \frac{q(4 - q)}{(q - 2)^2}. \quad (37)$$

3. For $b_1 = -1$ (i.e., $K_1 \rightarrow -\infty$), there is a solution of the form:

$$b_{12} = q - 1, \quad y_1 = -\frac{1}{2} \left(y_{12} + \frac{q^2 - 5q + 5}{q^2 - 4q + 4} \right). \quad (38)$$

IV. THREE COUPLED MODELS

The technique of mapping to coupled loop models has permitted us to study the case of $N = 3$ coupled Potts models, defined by the Hamiltonian

$$\begin{aligned} \beta H = & - \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ K_1 \sum_{\mu=1}^3 \delta_{ij}^\mu + K_{12} \sum_{\mu > \nu=1}^3 \delta_{ij}^\mu \delta_{ij}^\nu + K_{123} \delta_{ij}^1 \delta_{ij}^2 \delta_{ij}^3 \right\} \\ & - \sum_{\langle ijk \rangle} \left\{ L_1 \sum_{\mu=1}^3 \delta_{ijk}^\mu + L_{12} \sum_{\mu > \nu=1}^3 \delta_{ijk}^\mu \delta_{ijk}^\nu + L_{123} \delta_{ijk}^1 \delta_{ijk}^2 \delta_{ijk}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Since in the case of two coupled models, nontrivial selfdual solutions were only found when coupling identical models in an isotropic way, we shall henceforth restrict the coupling constants as follows:

$$K_1 = K_2 = K_3, \quad K_{12} = K_{13} = K_{23}, \quad L_1 = L_2 = L_3, \quad L_{12} = L_{13} = L_{23}, \quad (40)$$

and we will use the parameters [12, 13]

$$b_1 = e^{K_1} - 1, \quad b_{12} = e^{K_{12}+2K_1} - 2e^{K_1} + 1, \quad b_{123} = e^{K_{123}+3K_{12}+3K_1} - 3e^{K_{12}+2K_1} + 3e^{K_1} - 1 \quad (41)$$

$$y_1 = e^{L_1} - 1, \quad y_{12} = e^{L_{12}+2L_1} - 2e^{L_1} + 1, \quad y_{123} = e^{L_{123}+3L_{12}+3L_1} - 3e^{L_{12}+2L_1} + 3e^{L_1} - 1. \quad (42)$$

The mapping to coupled loop models follows the obvious generalisation of Eqs. (30)–(31), and the equivalence criterion is stated in the remark after Eq. (32).

To relate the coupling constants f_{abc} to the b and y , we first consider the case of vanishing three-spin interactions (i.e., $y = y_{12} = y_{123} = 0$). Letting $i \neq j \neq k$ designate distinct numbers in $\{1, 2, 3\}$ we have:

$$\begin{aligned} f_{iii}^0 &= b_{123}, \\ f_{iiij}^0 &= b_1 b_{12}, \\ f_{ijk}^0 &= b_1^3, \\ f_{ii4}^0 &= b_{12}, \\ f_{ii5}^0 &= b_{123} b_1^2 + 2b_{123} b_1 + b_{12} b_1^2, \\ f_{ij4}^0 &= b_1^2, \\ f_{ij5}^0 &= b_{12}^2 (1 + b_1) + 2b_{12} b_1^2, \\ f_{i44}^0 &= b_1, \\ f_{i45}^0 &= b_{12} (b_1^2 + 2b_1) + b_1^3, \\ f_{i55}^0 &= 2b_{12}^3 + 5b_{12}^2 b_1 + 2b_{123} b_{12} + 4b_{123} b_{12} b_1 + 2b_{123} b_1^2 + b_{123} b_{12}^2, \\ f_{444}^0 &= 1, \\ f_{445}^0 &= b_1^3 + 3b_1^2, \\ f_{455}^0 &= b_{12}^3 + 3b_{12}^2 + 6b_{12} b_1^2 + 6b_{12}^2 b_1, \\ f_{555}^0 &= 6b_{12}^3 + 18b_{12} (b_1 + b_{12}) b_{123} + 3(1 + 3b_1 + 3b_{12}) b_{123}^2 + b_{123}^3. \end{aligned} \quad (43)$$

For the general case one then has (note that we only give those f_{abc} which will be used in the duality relation (45) below):

$$\begin{aligned} f_{114} &= f_{114}^0, \\ f_{115} &= f_{115}^0 + y_1 (f_{111}^0 + 2f_{112}^0 + f_{114}^0 + f_{115}^0), \\ f_{124} &= f_{124}^0, \\ f_{125} &= f_{125}^0 + y_1 (2f_{112}^0 + f_{123}^0 + f_{124}^0 + f_{125}^0), \\ f_{144} &= f_{144}^0, \\ f_{155} &= f_{155}^0 + 2y (f_{115}^0 + 2f_{125}^0 + f_{145}^0 + f_{155}^0) + y_{12} (f_{111}^0 + f_{144}^0 + f_{155}^0 + 6f_{112}^0 + 2f_{123}^0 + \\ &\quad 2f_{114}^0 + 2f_{115}^0 + 4f_{124}^0 + 4f_{125}^0 + 2f_{145}^0), \\ f_{444} &= f_{444}^0, \\ f_{445} &= f_{445}^0 + y (3f_{144}^0 + f_{444}^0 + f_{445}^0), \\ f_{455} &= f_{455}^0 + 2y (3f_{145}^0 + f_{445}^0 + f_{455}^0) + y_{12} (3f_{114}^0 + f_{444}^0 + f_{455}^0 + 6f_{124}^0 + 6f_{144}^0 + 6f_{145}^0 + 2f_{445}^0), \\ f_{555} &= f_{555}^0 + 3y (3f_{155}^0 + f_{455}^0 + f_{555}^0) + 3y_{12} (3f_{115}^0 + f_{445}^0 + f_{555}^0 + 6f_{125}^0 + 6f_{145}^0 + 6f_{155}^0 + 2f_{455}^0) + y_{123} (3f_{111}^0 + \\ &\quad f_{444}^0 + f_{555}^0 + 18f_{112}^0 + 9f_{114}^0 + 9f_{115}^0 + 6f_{123}^0 + 18f_{124}^0 + 18f_{125}^0 + 9f_{144}^0 + 9f_{155}^0 + 18f_{145}^0 + 3f_{445}^0 + 3f_{455}^0). \end{aligned} \quad (44)$$

So from (the generalisation of) Eq. (32) we know how to express the c_{abc} in terms of the b and y . Given that we have isotropic Potts models with the same coupling constants, the non-trivial selfduality relations read simply:

$$c_{444} = c_{555}, \quad c_{455} = c_{445}, \quad c_{155} = c_{144}, \quad c_{115} = c_{114}, \quad c_{125} = c_{124}. \quad (45)$$

A. Selfdual solutions

There are two types of trivial solutions, as in the case of two coupled models.

An important difference with the case of two coupled models is that non-trivial selfdual solutions with $y = y_{12} = y_{123} = 0$ only exist for exceptional values of q (i.e., $q = 0$ and $q = 4$; see below). So for generic values of q , the three-spin interactions are necessary to generate non-trivial solutions of the selfduality problem.

As before, the most general solutions are not algebraically simple in terms of the variables b and y . We therefore report only a few special cases:

1. There are three non-trivial solutions with $L_{12} = L_{123} = 0$ (i.e., $y_{12} = y_1^2$ and $y_{123} = y_1^3$). They read:

$$b_1 = -\frac{q}{2}, \quad b_{12} = \frac{q^2}{4}, \quad b_{123} = \frac{q^3 - 9q^2 + 18q - 12}{4}, \quad y_1 = \frac{q(4 - q)}{q^2 - 4q + 4}; \quad (46)$$

$$b_1 = -1, \quad b_{12} = \frac{q}{2}, \quad b_{123} = \frac{q(1 - q)}{2}, \quad y_1 = \frac{q}{2 - q}; \quad (47)$$

$$(4q - 6)b_1^2 + 2qb_1 + q = 0, \quad b_{12} = -\frac{q(1 + 2b_1)}{2},$$

$$b_{123} = \frac{q^2((8q^2 - 16q - 6)b_1 + 4q^2 - 12q + 3)}{4(3b_1 + q)(2q - 3)}, \quad y_1 = \frac{q}{2 - q}. \quad (48)$$

2. There are two non-trivial solutions with $L_1 = 0$ (i.e., $y_1 = 0$):

$$b_1 = -1, \quad b_{12} = \frac{q}{2}, \quad b_{123} = \frac{q(1 - q)}{2}, \quad y_{12} = \frac{q(4 - q)}{q^2 - 4q + 4}, \quad y_{123} = \frac{2q(q^2 - 6q + 6)}{q^3 - 6q^2 + 12q - 8}; \quad (49)$$

$$b_1 = 1 - q, \quad b_{12} = \frac{q(1 - q)}{2 - q}, \quad b_{123} = \frac{q(q^2 - 3q + 1)}{(2 - q)(q - 3)},$$

$$y_{12} = \frac{q(q^6 - 11q^5 + 45q^4 - 87q^3 + 86q^2 - 42q + 8)}{q^6 - 18q^5 + 126q^4 - 432q^3 + 756q^2 - 648q + 216},$$

$$y_{123} = \frac{q(4q^8 - 72q^7 + 531q^6 - 2068q^5 + 4584q^4 - 5856q^3 + 4220q^2 - 1584q + 240)}{q^9 - 30q^8 + 390q^7 - 2872q^6 + 13140q^5 - 38520q^4 + 71928q^3 - 82080q^2 + 51840q - 13824}. \quad (50)$$

3. There are two non-trivial solutions with $y_{12} = 0$. We give here only the first one because the other is complicated:

$$b_1 = -1, \quad b_{12} = \frac{q}{2}, \quad b_{123} = \frac{q(1 - q)}{2}, \quad y_1 = \frac{q(4 - q)}{2(q^2 - 4q + 4)}, \quad y_{123} = \frac{q^2(q - 6)}{2(q^3 - 6q^2 + 12q - 8)}. \quad (51)$$

Note that for $q = 2$ the non-trivial solutions given are singular. In fact, for $q = 2$, they can be written as: $b_1 = -1$, $b_{12} = 1$, $b_{123} = -1$, and the values of y , y_{12} , y_{123} are arbitrary. Indeed the values of the b correspond to three decoupled antiferromagnetic Potts models at zero temperature, and so the values of the parameters y_1 , y_{12} , y_{123} do not matter.

V. NUMERICAL STUDY OF TWO COUPLED MODELS

It was mentioned in the Introduction that the Potts model is usually critical on the selfdual manifolds, for suitable values of q (i.e., $0 \leq q \leq 4$). We expect this also to be true for coupled Potts models, and so it is interesting to determine the corresponding universality classes. In the lack of an exact (Bethe Ansatz) solution, this question can be addressed by evaluating the effective central charge along the selfdual manifolds, e.g., using numerical transfer matrix techniques.

In this Section we focus on the selfdual curve (19) for two coupled models with pure two-spin interactions. Note that in Section IID we have already remarked on a few special values of the parameter g for which the physics of the two coupled models can be related to that of a single model.

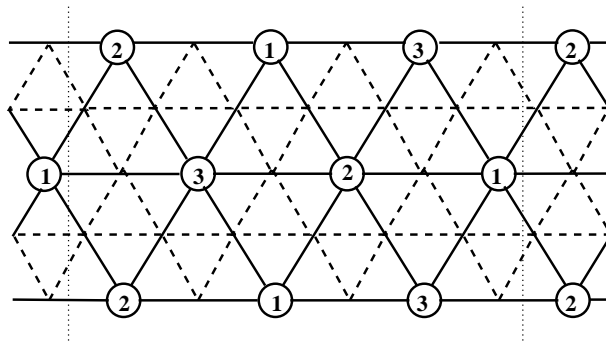


FIG. 5: Semi-infinite strip, here of size $L = 2$ triangles in the finite (vertical) direction. Periodic boundary conditions identify the top and the bottom of the figure. Potts spins are defined at the loci of the small circles; they interact along the solid lines which form a triangular lattice. The labels within each circle identify the usual three sublattices of the triangular lattice. The loop model is defined on the medial Kagomé lattice, shown in broken linestyle. The transfer matrix propagates the system along the horizontal direction, from left to right. Thin dotted lines indicate successive time slices (see text).

A. Transfer matrix

The triangular-lattice Potts model can be transformed into a loop model on the medial (surrounding) graph—which is the Kagomé lattice—in a standard way [3, 11]. (This loop model should not be confused with the one described in Section III.) We have computed the free energy of the two coupled models (6) on semi-infinite strips by constructing the transfer matrix of two coupled Kagomé-lattice loop models.

The geometry is depicted in Fig. 5. For a periodic strip of circumference L triangles, each time slice cuts $2L$ dangling ends of the Kagomé-lattice loop model. In order to have the leading eigenvalue Λ_0 of the transfer matrix \mathbf{T}_L correspond to the ground state of the continuum model, the definition of \mathbf{T}_L must respect the usual sublattice structure of the triangular lattice. This means that L must be even, and that successive time slices are as shown in Fig. 5.

The numerical diagonalisation is most efficiently performed by decomposing \mathbf{T}_L in a product of sparse matrices, each adding one vertex of the Kagomé lattice (or, equivalently, one edge of the triangular lattice). With the setup of Fig. 5, all these sparse matrices are identical, except for the position of the two dangling ends on which they act. We have been able to diagonalise \mathbf{T}_L for sizes up to $L = 10$ (the corresponding matrix has dimension 141 061 206).

B. Central charge

The free energy per unit area is $f(L) = -\frac{1}{4\sqrt{3}L} \log \Lambda_0$, the length scale being the height of one triangle. We have extracted values of the effective central charge c from three-point fits of the form [17]

$$f(L) = f(\infty) - \frac{\pi c}{6L^2} + \frac{A}{L^4}, \quad (52)$$

where the non-universal term in A is supposed to adequately represent the higher-order corrections.

Fig. 6 shows the numerical values of $c(g)$ along the curve (19). For each value of g , three estimates for $c(g)$ are shown, obtained by fitting $\{f(L-4), f(L-2), f(L)\}$ to (52) for $L = 6$, $L = 8$ and $L = 10$ respectively.

Naively, one would expect the K_{12} coupling to be marginal at the $q = 2$ ferromagnetic point (i.e., at $g = \frac{3}{4}$) and the surrounding regime to be accessible to perturbative calculations. However, it should be remembered that 1) the point $g = \frac{3}{4}$ is not that of two decoupled Ising models but that of a single 4-state model, and that 2) the renormalisation group equations for N coupled models are singular when $N = 2$ [11]. Nevertheless, the numerics seems quite conclusive that the $q < 2$ regime with $\frac{1}{4} \leq g < \frac{3}{4}$ has a central charge which is just twice that of (21) [upon changing the parametrisation, $g \rightarrow 1 - g$]:

$$c(g) = 2 \left(1 - \frac{6(1-g)^2}{g} \right), \quad \text{for } \frac{1}{4} \leq g < \frac{3}{4}, \quad (53)$$

meaning presumably that the continuum limit is really that of two decoupled models. This is also consistent with

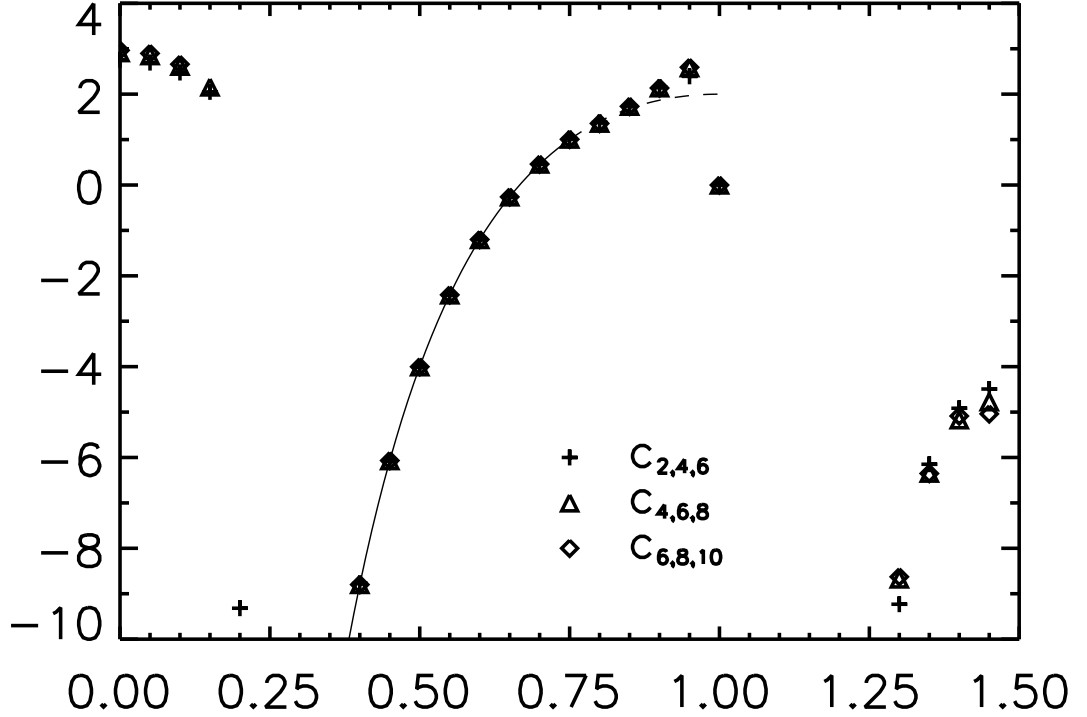


FIG. 6: Three-point fits for the effective central charge c as a function of g . The solid curve shows the exact result (53), valid for $\frac{1}{4} \leq g < \frac{3}{4}$, as discussed in the text.

the result $c(g = \frac{1}{2}) = -4$. The agreement of the numerics with (53) is excellent also for those data points (with $0.25 \leq g \leq 0.35$) which are not visible in Fig. 6.

The region $0 \leq g \leq g_1$, with $g_1 \approx 0.15$, is interesting as it corresponds to $c > 2$. This hints at the coupled models requiring some kind of higher symmetry than its two constituent bosonic theories. Note in particular that for $g = 0$, our three estimates for c read $c_{2,4,6} = 2.758$, $c_{4,6,8} = 2.914$ and $c_{6,8,10} = 2.966$, which we extrapolate to $c(g = 0) = 3.00 \pm 0.01$. We conjecture that the exact result is $c(g = 0) = 3$. Since $q = 4$, this theory can also be represented as two coupled vertex models on the Kagomé lattice [3].

For $g = 1$, the Boltzmann weights (20) are all ± 1 . It turns out that in this particular case it is more convenient to work with a modified transfer matrix that adds not one but $L/2$ time slices, cf. Fig. 5. This matrix has its largest eigenvalue equal to unity regardless of L , and we conclude that $f(L) = 0$ for any L . In particular, this means $c(g = 1) = 0$. The numerics is however indicative of a non-trivial regime for $\frac{3}{4} < g < 1$, and it seems that we may have $c(g) \rightarrow 4$ as $g \rightarrow 1^-$, consistent with two decoupled models each of which is obtained by taking the limit $g \rightarrow 1^+$ in (21).

In the region $1 < g < g_2$, with $g_2 \approx 1.10$, our numerical diagonalisation scheme experiences difficulties, maybe due to the leading eigenvalue having a non-zero imaginary part.

Finally, in the regime $g_2 < g < \frac{3}{2}$ the central charge takes large, negative values (in particular, some of the values are not visible in Fig. 6). At first sight one might believe that the continuum limit is that of two decoupled models in the Berker-Kadanoff phase, i.e., with $c(g)$ given by twice that of (21) [upon changing the parametrisation $g \rightarrow 2 - g$]: $c(g) = 2(1 - 6(2 - g)^2/(g - 1))$. This possibility is however clearly ruled out by the numerics, and $c(g)$ appears to be given by a non-trivial expression.

As $g \rightarrow \frac{3}{2}$, the two leading eigenvalues of the transfer matrix become degenerate. In the sense of analytically continuing the curve (18) to negative values of q , this presumably marks a transition to non-critical behaviour for $q < 0$, i.e., with the phase transitions being first-order in b upon crossing the curve (18).

VI. CONCLUSION

Using a mapping of coupled Potts models on the triangular lattice to coupled loop models, we have obtained non-trivial selfdual manifolds for two and three coupled Potts models with two and three-spin interactions. A numerical study of the case of two coupled models shows that these manifolds are good candidates for novel critical points, in particular in the antiferromagnetic and unphysical regimes.

The technique can be applied to any number of coupled models, but expressing the solutions explicitly in terms of the original coupling constants becomes increasingly complicated as the number of models grows. This is in contrast to the quite simple results for coupled Potts models on the square lattice [12, 13].

It would be interesting to study the simplest non-trivial case (19) using the methods of integrable systems.

Acknowledgments

We would like to thank Henk J. Hilhorst for an interesting comment which motivated us for undertaking the present study.

-
- [1] F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).
 - [2] P. W. Kasteleyn and C. M. Fortuin, J. Phys. Soc. Jap. (suppl.) **26**, 11 (1969).
 - [3] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Academic Press, New York, 1982).
 - [4] R. J. Baxter, Proc. Roy. Soc. London A **383**, 43 (1982).
 - [5] R. J. Baxter, H. N. V. Temperley and S. E. Ashley, Proc. Roy. Soc. London A **358**, 535 (1978).
 - [6] R. J. Baxter, J. Phys. C **6**, L445 (1973).
 - [7] H. Saleur, Nucl. Phys. B **360**, 219 (1991).
 - [8] I. Vaysburd, Nucl. Phys. B **446**, 387 (1995).
 - [9] A. W. W. Ludwig and J. L. Cardy, Nucl. Phys. B **285**, 687 (1987).
 - [10] A. W. W. Ludwig, Nucl. Phys. B **285**, 97 (1987); *ibid.* **330**, 639 (1990).
 - [11] V. S. Dotsenko, J. L. Jacobsen, M.-A. Lewis and M. Picco, Nucl. Phys. B **546**, 505 (1999).
 - [12] J. L. Jacobsen, Phys. Rev. E **62**, R1 (2000).
 - [13] V. S. Dotsenko, J. L. Jacobsen, X. S. Nguyen and R. Santachiara, Nucl. Phys. B **631**, 426 (2002).
 - [14] D. Kim and R. I. Joseph, J. Phys. C **7**, L167 (1974).
 - [15] F. Y. Wu and K. Y. Lin, J. Phys. A **13**, 629 (1980).
 - [16] J. L. Jacobsen, unpublished (2002).
 - [17] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy and M. P. Nightingale, Phys. Rev. Lett. **56**, 742 (1986); I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **56**, 746 (1986).

Relations between Potts and RSOS models on a torus

Jean-François Richard^{1,2} and Jesper Lykke Jacobsen^{1,3}

¹*LPTMS, Université Paris-Sud, Bâtiment 100, 91405 Orsay, France*

²*LPTHE, Université Paris VI, Tour 16, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France and*

³*Service de Physique Théorique, CEA Saclay, 91191 Gif sur Yvette, France*

(Dated: August 24, 2006)

We study the relationship between Q -state Potts models and staggered RSOS models of the A_{p-1} type on a torus, with $Q^{1/2} = 2 \cos(\pi/p)$. In general the partition functions of these models differ due to clusters of non-trivial topology. However we find exact identities, valid for any temperature and any finite size of the torus, between various modified partition functions in the two pictures. The field theoretic interpretation of these modified partition function is discussed.

PACS numbers: 05.50.+q, 05.20.-y

I. INTRODUCTION

The two-dimensional Potts model [1, 2] can be defined in terms of integer valued spins $S_i = 1, 2, \dots, Q$ living on the vertices $\{i\}$ of a lattice. Its partition function reads

$$Z_{\text{spin}} = \sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K\delta(S_i, S_j)}, \quad (1)$$

where δ is the Kronecker delta and $\langle ij \rangle$ are the lattice edges. In this paper we take the lattice to be an $L \times N$ square lattice (say, of vertical width L and horizontal length N) with toroidal boundary conditions (i.e., periodic boundary conditions in both lattice directions). We denote $V = LN$ the number of vertices of the lattice and $E = 2LN$ the number of edges.

This initial definition can be extended to arbitrary real values of Q by means of a cluster expansion [3]. One finds

$$Z_{\text{cluster}} = \sum_{\mathcal{C}} v^{e(\mathcal{C})} Q^{c(\mathcal{C})}, \quad (2)$$

where $v = e^K - 1$. Here, the sum is over the 2^E possible colourings \mathcal{C} of the lattice edges (each edge being either coloured or uncoloured), $e(\mathcal{C})$ is the number of coloured edges, and $c(\mathcal{C})$ is the number of connected components (clusters) formed by the coloured edges. For Q a positive integer one has $Z_{\text{spin}} = Z_{\text{cluster}}$.

Yet another formulation is possible when $Q^{1/2} = q + q^{-1}$ and q is a root of unity

$$q = e^{i\pi/p}, \quad p = 3, 4, 5, \dots, \quad (3)$$

this time in terms of a restricted height model with face interactions [4–6], henceforth referred to as the RSOS model. This formulation is most easily described in an algebraic way. The Potts model transfer matrix T that adds one column of the square lattice can be written in terms of the generators e_j of the Temperley-Lieb algebra [7] as follows

$$\begin{aligned} T &= Q^{L/2} H_L \cdots H_2 H_1 V_L \cdots V_2 V_1, \\ H_i &= x I_{2i-1} + e_{2i-1}, \\ V_i &= I_{2i} + x e_{2i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Here, H_i and V_i are operators adding respectively horizontal and vertical edges to the lattice, I_j is the identity operator acting at site j , and the parameter $x = Q^{-1/2}v = Q^{-1/2}(e^K - 1)$. The generators satisfy the well-known algebraic relations

$$\begin{aligned} e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i, \\ (e_i)^2 &= Q^{1/2} e_i, \end{aligned} \quad (5)$$

$$e_i e_j = e_j e_i \text{ for } |i - j| \geq 2. \quad (6)$$

More precisely, V_i can be thought of as adding a face to the lattice, surrounded by two direct and two dual vertices, as shown in Fig. 1. H_i is similarly defined, by exchanging direct and dual sites on the figure.

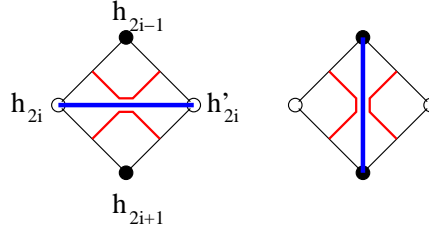


FIG. 1: Graphical rendering of $V_i = I_{2i} + x e_{2i}$. Direct (resp. dual) vertices are shown as full (resp. empty) circles. Coloured edges (direct and dual) in the cluster picture are depicted as thick blue lines. Their surrounding cluster boundaries are given as thin red lines. RSOS heights h_j are defined on both direct and dual vertices as shown. The action of I_{2i} (resp. e_{2i}) is illustrated on the left (resp. right) part of the figure. Our convention is that the transfer matrix acts towards the right.

Meanwhile, the operators I_j and e_j can be represented in various ways, thus giving rise to different transfer matrices. When Q is a positive integer, a spin representation of dimension Q^L can be defined in an obvious way, and one has

$$Z_{\text{spin}} = \text{Tr} (T_{\text{spin}})^N. \quad (7)$$

For any real Q a cluster representation [8] of dimension $C_L = \frac{(2L)!}{(L+1)!L!}$ can be defined by letting I_j and e_j act on the boundaries [9, 10] that separate direct and dual clusters, represented as thin red lines in Fig. 1. But it is impossible to write Z_{cluster} as a trace of T_{cluster} defined in this way. This is due to the existence of loops of cluster boundaries that are non contractible with respect to the periodic boundary conditions in the horizontal direction of the lattice.[17] For this reason, we shall not discuss T_{cluster} much further in this paper, but we maintain Eq. (2) as the definition of Z_{cluster} for real Q .

Finally, when Q is given by Eq. (3) the RSOS model is introduced by letting I_j and e_j act on heights $h_j = 1, 2, \dots, p-1$ defined on direct and dual vertices [4, 5]. A pair of neighbouring direct and dual heights are constrained to differ by ± 1 . In this representation we have

$$I_j = \delta(h_j, h'_j), \quad e_j = \delta(h_{j-1}, h_{j+1}) \left(S_{h_j} S_{h'_j} \right)^{1/2} (S_{h_{j-1}})^{-1}, \quad (8)$$

where $S_h = \sin(\pi h/p)$. Note that the clusters (direct and dual) are still meaningful as they are surfaces of constant height. The constants S_h are actually the components of the Perron-Frobenius eigenvector of the incidence matrix (of size $p-1$)

$$G_{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

of the Dynkin diagram A_{p-1} [5]. In this representation, of dimension $\text{Tr} (G_{p-1})^{2L} \sim Q^L$, we now define the transfer matrix T_{RSOS} by Eq. (4) and the partition function $Z_{\text{RSOS}} = \text{Tr} (T_{\text{RSOS}})^N$, the trace being over allowed height configurations.

In this paper we discuss the relations between Z_{RSOS} and Z_{cluster} , with $Q^{1/2} = 2 \cos(\pi/p)$ cf. Eq. (3). These partition functions are in general different, due to clusters of non-trivial topology wrapping around the torus.

We start by showing numerically, in section II, that for $Q = 3$ the transfer matrices T_{spin} and T_{RSOS} have nonetheless many identical eigenvalues. Defining various sectors (motivated by duality and parity considerations) and also twisting the periodic boundary conditions in different ways, we are able to conjecture several relations between the corresponding transfer matrix spectra.

With this numerical motivation we then go on, in section III, to prove these relations on the level of the RSOS and cluster model partition functions on finite $L \times N$ tori. Some of the relations are specific to $Q = 2$ ($p = 4$) and $Q = 3$ ($p = 6$), and some hold for general values of p . All of them hold for arbitrary values of the temperature variable x . We stress that in all cases the proofs are based on rigorous combinatorial considerations.

We conclude the paper, in section IV, by interpreting our results, and the various partition functions introduced, on the level of conformal field theory, at the selfdual temperature $x = 1$ where the Potts model is at a critical point.

Transfer matrix: Twist:	$T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ $I \ Z_2$	$T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ $I \ Z_2$	T_{spin} $I \ Z_2 \ Z_3$	$T_{\text{spin}}^{\text{dual}}$ $I \ Z_2 \ Z_3$
-4.547135105405	1 0	1 0	1 0 0	1 0 0
-4.536300662409	1 0	1 0	0 1 0	0 1 0
-4.530748290953	1 1	0 0	2 0 0	0 0 1
-3.512711596812	0 0	1 1	0 0 1	2 0 0
-3.502223380184	1 0	1 0	0 1 0	0 1 0
-3.441474985184	0 0	0 0	0 0 2	0 0 2
-3.397645107750	0 2	0 2	0 2 0	0 2 0
-3.348639214318	0 0	0 0	0 0 2	0 0 2
-3.292754029664	1 0	2 1	0 1 1	2 1 0
-2.335814864962	1 0	1 0	1 0 0	1 0 0
-2.307465012288	2 1	1 0	2 1 0	0 1 1
-2.285900912958	1 0	1 0	0 1 0	0 1 0
-2.251579827634	0 0	0 0	0 0 2	0 0 2
-2.236228400659	0 0	1 1	0 0 1	2 0 0
-2.203480723895	1 1	0 0	2 0 0	0 0 1
-2.202573934202	0 2	0 2	0 2 0	0 2 0
-2.158744056768	0 1	0 1	1 0 0	1 0 0

TABLE I: Spectra of various transfer matrices with $Q = 3$, subject to periodic (I) or different twisted periodic (Z_2 and Z_3) boundary conditions, as defined in the text. The first column gives the free energies $f_i = -L^{-1} \log(\Lambda_i)$, here for width $L = 2$ and temperature variable $x = 5$. Subsequent columns give the multiplicity of each f_i .

II. TRANSFER MATRIX SPECTRA

The spectra of the transfer matrices T_{spin} and T_{RSOS} are easily studied numerically by exact diagonalisation techniques. Denoting the eigenvalues as Λ_i , with $i = 1, 2, \dots, \dim(T)$, the results are most conveniently stated in terms of the corresponding free energies per spin, $f_i = -L^{-1} \log(\Lambda_i)$. Sample results for $Q = 3$, width $L = 2$, and temperature variable $x = 5$ are shown in Table I.

Due to the rules of the RSOS model, the heights living on the direct and dual lattices have opposite parities. The transfer matrix can therefore be decomposed in two sectors, $T_{\text{RSOS}} = T_{\text{RSOS}}^{\text{even}} \oplus T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$, henceforth referred to as even and odd. In the even sector, direct heights take *odd* values and dual heights *even* values (and vice versa for the odd sector). [18] Results with standard (i.e., untwisted) periodic boundary conditions in the vertical direction are given in the columns labeled I in Table I.

In the spin representation $T_{\text{spin}}(x)$ has been defined above (recall that $x = Q^{-1/2}(e^K - 1)$). We also introduce a related transfer matrix

$$T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x) \equiv x^{2L} T_{\text{spin}}(x^{-1}), \quad (10)$$

as well as the corresponding partition function $Z_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x) \equiv \text{Tr}(T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x))^N$. The appearance of the dual temperature, $x_{\text{dual}} = x^{-1}$ explains the terminology. More precisely, on a planar lattice one has the fundamental duality relation [1]

$$Z_{\text{spin}}(x) = Q^{-1} x^E \tilde{Z}_{\text{spin}}(x^{-1}), \quad (11)$$

where \tilde{Z} must be evaluated on the dual lattice. For a square lattice with toroidal boundary conditions, the dual and direct lattices are isomorphic, but Eq. (11) breaks down because of effects of non-planarity.

Referring to Table I, we observe that the leading eigenvalues of the four transfer matrices introduced this far (i.e., $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$, $T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$, T_{spin} and $T_{\text{spin}}^{\text{dual}}$) all coincide. On the other hand, for any two T chosen among these four, some of the sub-leading eigenvalues coincide, whilst others are different. So the discrepancy between the four corresponding partition functions appears to be a boundary effect which vanishes in limit $N \rightarrow \infty$. However, when taking differences of the multiplicities we discover a surprising relation:

$$2(Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x)) = Z_{\text{spin}}(x) - Z_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x). \quad (12)$$

Note that the leading eigenvalues cancel on both sides of this relation.

At the selfdual point $x = 1$, we find that the spectra of $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ and $T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ coincide completely, as do those of T_{spin} and $T_{\text{spin}}^{\text{dual}}$. In particular, both sides of Eq. (12) vanish. It is however still true that subleading eigenvalues of $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ and T_{spin} differ.

More relations can be discovered by introducing twisted periodic boundary conditions in the transfer matrices. For the RSOS model this can be done by twisting the heights, $h \rightarrow p - h$, when traversing a horizontal seam. Note that this transformation makes sense as it leaves the weights of Eq. (8) invariant, since $S_h = S_{p-h}$. The shape of the seam can be deformed locally without changing the corresponding partition function; we can thus state more correctly that the seam must be homotopic to the horizontal principal cycle of the torus. Note also that the twist is only well defined for even p (and in particular for $Q = 3$, $p = 6$), since the heights on the direct and dual lattice must have fixed and opposite parities in order to satisfy the RSOS constraint. In Table I, this twist is labeled Z_2 , since it amounts to exploiting the Z_2 symmetry of the underlying Dynkin diagram A_{p-1} . Comparing again multiplicities we discover a second relation

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}(x). \quad (13)$$

The relations (12) and (13) are special cases of relations that hold for all x , L and N , and for all even p . The general relations (see Eqs. (30) and (37)) are stated and proved in section III below.

In the particular case of $Q = 3$ one can define two different ways of twisting the spin representation, which will lead to further relations. The first type of twist shall be referred to as a Z_2 twist, and consist in interchanging spin states $S_i = 1$ and $S_i = 2$ across a horizontal seam, whereas the spin state $S_i = 3$ transforms trivially. The second type of twist, the Z_3 twist, consists in permuting the three spin states cyclically when traversing a horizontal seam. The spectra of the corresponding transfer matrices are given in Table I.

This leads to another relation between the spectra in the spin representation (stated here in terms of the corresponding partition functions)

$$Z_{\text{spin}}^{Z_2}(x) = Z_{\text{spin}}^{\text{dual}, Z_2}(x), \quad (14)$$

as well as two further relations linking the spin and RSOS representations:

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = - \left(Z_{\text{spin}}^{Z_3}(x) - Z_{\text{spin}}^{\text{dual}, Z_3}(x) \right), \quad (15)$$

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) + Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) = Z_{\text{spin}}(x) + Z_{\text{spin}}^{Z_2}(x). \quad (16)$$

These relations are proved in section III J below.

III. RELATIONS BETWEEN PARTITION FUNCTIONS

A. Weights in the cluster and RSOS pictures

A possible configuration of clusters on a 6×6 torus is shown in Fig. 2. It can be thought of as a random tessellation using the two tiles of Fig. 1. For simplicity we show here only the clusters (direct or dual) and not their separating boundaries (given by the thin red lines in Fig. 1). Two clusters having a common boundary are said to be neighbouring. For convenience in visualising the periodic boundary conditions the thick lines depicting the clusters have been drawn using different colours (apart from clusters consisting of just one isolated vertex, which are all black).

To compute the contribution of this configuration to $Z_{\text{cluster}}(x)$, each direct cluster is weighed by a factor of Q , and each coloured direct edge carries a factor of $v = Q^{1/2}x$. Note in particular that the cluster representation does not distinguish clusters of non-trivial topology (i.e., clusters which are not homotopic to a point). In the following we shall call such clusters non-trivial; clusters which are homotopic to a point are then referred to as trivial.

The contribution of this same configuration to Z_{RSOS} consists of

1. a global factor of $Q^{V/2}$ coming from the prefactor of Eq. (4),
2. a factor of x for each coloured direct edge [12], and
3. an x -independent factor due to the topology of the (direct and dual) clusters [5].

The interest is clearly concentrated on this latter, topological factor which we denote w in the following. For a given cluster configuration its value can be computed from the adjacency information of the clusters. This information is conveniently expressed in the form of a Pasquier graph [5]; for the cluster configuration of Fig. 2 this graph is shown in Fig. 3.

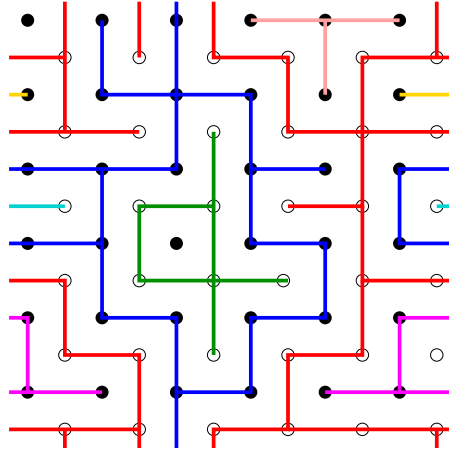


FIG. 2: A possible cluster configuration on a 6×6 torus. Direct and dual vertices are shown as filled and empty black circles. Clusters (direct or dual), other than isolated vertices, are depicted here using distinct colours, for convenience in appreciating the periodic boundary conditions. There are six direct clusters and four dual clusters. One direct cluster and one dual cluster are non-homotopic to a point.

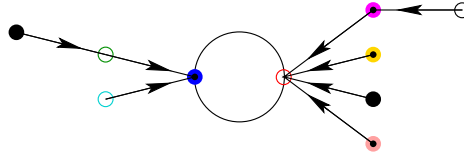


FIG. 3: Pasquier graph corresponding to the cluster configuration of Fig. 2. Direct (resp. dual) clusters are shown as filled (resp. empty) circles, using the same colour coding as in Fig. 2. Neighbouring clusters are connected by an edge. The arrows are explained in the text.

The rules for drawing the Pasquier graph in the general case are as follows. Each cluster is represented by a vertex, and vertices representing neighbouring clusters (i.e., clusters having a common boundary) are joined by a directed edge. An edge directed from vertex A to vertex B means that the common boundary is surrounding cluster A and is surrounded by cluster B . In particular, the in-degree b_{in} of a cluster is the number of boundaries surrounded by that cluster, and the out-degree b_{out} is the number of boundaries surrounding the cluster. By definition, a boundary separating a non-trivial cluster from a trivial one is said to be surrounded by the non-trivial cluster; note that there is necessarily at least one non-trivial cluster. We do not assign any orientation to edges joining two non-trivial clusters, since in that case the notion of surrounding is nonsensical.

The topological structure of the Pasquier graph is characterised by the following three properties:

1. The graph is bicolourable, with one colour (represented by filled circles in Fig. 3) corresponding to direct clusters and the other (empty circles in Fig. 3) to dual clusters.
2. The vertices corresponding to non-trivial clusters and the undirected edges form a cycle.
3. Each vertex corresponding to a non-trivial cluster is the root of a (possible empty) tree, whose vertices correspond to trivial clusters. The edges in the tree are directed towards the root.

Property 3 is easily proved by noticing that vertices corresponding to trivial clusters have all $b_{\text{out}} = 1$, i.e., such clusters have a unique external boundary. Regarding property 2, we shall define the order n of the Pasquier graph as the number of undirected edges. By property 1, n is even. When $n = 0$ we shall call the graph degenerate; this corresponds to a situation in which a single cluster (direct or dual) is non-trivial.

In the RSOS picture, each configuration of the clusters (such as the one on Fig. 2) corresponds to many different height configurations. The topological (x -independent) contribution to the weight of a cluster configuration in Z_{RSOS} is therefore obtained by summing weights in the RSOS model with $x = 1$ over all height configurations which are compatible with the given cluster configuration [5]. This contribution can be computed from the Pasquier graph by using the incidence matrix G_{p-1} of the Dynkin diagram A_{p-1} , as we now review.

Let w be the weight of a given Pasquier graph, and let w' be the weight of the graph in which a leaf of one of its trees (as well as its adjacent outgoing edge) has been removed. More precisely, w is the weight of a cluster configuration with given heights on each cluster, and w' is the partial sum of such weights over all possible heights of the leaf cluster. Let j be the height of the leaf, and let i be the height of its parent. Then

$$w = w'(S_i)^{-1} \sum_{1 \leq j \leq p-1} (G_{p-1})_{ij} S_j = w'(S_i)^{-1} Q^{1/2} S_i = Q^{1/2} w', \quad (17)$$

where in the first equality we used that the weight of a cluster at height h is $S_h^{b_{\text{out}} - b_{\text{in}}}$ [5], and in the second that $\{S_j\}$ is an eigenvector of G_{p-1} with eigenvalue $Q^{1/2}$. Iterating the argument until all the trees of the Pasquier graph have been removed, we conclude that each trivial cluster carries the weight $Q^{1/2}$.

We have then

$$w = Q^{(l-n)/2} w_c, \quad (18)$$

where w_c is the weight of the cycle of the Pasquier graph. It corresponds to the number of closed paths of length n on the Dynkin diagram

$$w_c = \text{Tr}(G_{p-1})^n = \sum_{1 \leq k \leq p-1} (2 \cos(k\pi/p))^n, \quad (19)$$

where we have used the eigenvalues of G_{p-1} . Note that, in contrast to the case of trivial clusters, *all* the eigenvalues contribute to the combined weight w_c of the non-trivial clusters, and that this weight cannot in general be interpreted as a product of individual cluster weights. (We also remark that it is not a priori obvious that the right-hand side of Eq. (19) is an integer.)

B. Coincidence of highest eigenvalues

As an application we now argue that the dominant eigenvalues of the transfer matrices T_{RSOS} , T_{cluster} , T_{spin} coincide for any width L . We suppose $x > 0$ so that all weights are positive; this guarantees in particular that standard probabilistic arguments apply.

Consider first T_{cluster} and T_{spin} , supposing Q a positive integer. Since the system is quasi one-dimensional, with $L \ll N$, configurations having clusters of linear extent much larger than L are exceedingly rare and can be neglected. In particular, almost surely no cluster will wrap around the system in the horizontal direction. Writing $Z_{\text{cluster}} \sim (\Lambda_c)^N$ and $Z_{\text{spin}} \sim (\Lambda_s)^N$, the choice of boundary conditions in the horizontal direction will thus have no effect on the values of Λ_c and Λ_s . We therefore switch to free boundary conditions in the horizontal direction. Then it is possible [13] to write $Z_{\text{cluster}} = \langle f | (T_{\text{cluster}})^N | i \rangle$ for suitable initial and final vectors $|i\rangle$ and $\langle f|$. It is not difficult to see, using the Perron-Frobenius theorem, that these vectors both contain a non-vanishing component of the dominant eigenvector of T_{cluster} . We conclude that Λ_c must be the dominant eigenvalue of T_{cluster} . Likewise, Λ_s is the dominant eigenvalue of T_{spin} . The conclusion follows by noting that $Z_{\text{cluster}} = Z_{\text{spin}}$ by construction.

We now turn to T_{RSOS} and T_{cluster} , supposing $Q^{1/2} = 2 \cos(\pi/p)$, cf. Eq. (3). As before we impose free horizontal boundary conditions on the cluster model. Then, since the resulting lattice is *planar*, we recall that Z_{cluster} can be written as well in terms of the boundaries separating direct and dual clusters [9, 10]

$$Z_{\text{cluster}} = Q^{V/2} \sum_{\mathcal{C}} x^{e(\mathcal{C})} Q^{l(\mathcal{C})/2}, \quad (20)$$

where the configurations \mathcal{C} correspond bijectively to those of Eq. (2), and $l(\mathcal{C})$ is the number of cluster boundaries (loops). For $N \rightarrow \infty$ we have $Z_{\text{RSOS}} \sim (\Lambda_r)^N$, and to conclude that $\Lambda_r = \Lambda_c$ it suffices to show that asymptotically $Z_{\text{RSOS}} \sim Z_{\text{cluster}}$. Consider now a typical cluster configuration. Almost surely, the corresponding Pasquier diagram will be of order $n \sim N$, and in particular $n \gg 1$. Hence $w_c \sim Q^{n/2}$ from Eq. (19). It follows that also in the RSOS picture each cluster boundary carries the weight $Q^{1/2}$, regardless of its homotopy. The conclusion follows.

In section II we have introduced the decomposition of the RSOS model into even and odd subsectors. In the even sector, heights on direct (resp. dual) clusters are *odd* (resp. *even*). In particular, we have $Z_{\text{RSOS}} = Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} + Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$. Note that since the largest and smallest eigenvalue in Eq. (19) differ just by a sign change, we have the slightly more precise statement for $N \rightarrow \infty$:

$$Z_{\text{RSOS}} \simeq 2Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} \simeq 2Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}} \simeq 2Z_{\text{cluster}}. \quad (21)$$

In particular, the largest eigenvalues of $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ and $T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ coincide, in agreement with the numerical data of Table I.

C. Duality relation for $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$

We now compare the contributions to the partition functions $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ and $Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ for a given cluster configuration (summed over all possible heights assignments with the specified parity). The argument that trivial clusters carry a weight $Q^{1/2}$ is unchanged, cf. Eq. (17), and holds irrespective of parity. We can thus limit the discussion to the weight w_c of the cycle in the Pasquier graph.

We first show that

$$w_c^{\text{even}} = w_c^{\text{odd}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{p-1})^n \quad (22)$$

for non-degenerate Pasquier graphs (i.e., of order $n \neq 0$). In this non-degenerate case, the numbers of direct and dual non-trivial clusters are equal, whence $n = 2k$ is even. By definition w_c^{even} is the number of height assignments $\{h_1, h_2, \dots, h_{2k}\}$ such that $h_i = 1, 2, \dots, p-1$ and $|h_{i+1} - h_i| = 1$ (we consider i modulo $2k$), with h_1 even. Now by a cyclic relabeling, $i \rightarrow i+1 \pmod{2k}$, each such height assignment is mapped bijectively to a height assignment in which h_1 is odd. It follows that $w_c^{\text{even}} = w_c^{\text{odd}}$. [19]

Consider now the degenerate case $n = 0$ with just a single non-trivial cluster (which will then span both periodic directions of the torus). Then, counting just the number of available heights of a given parity, the contribution of the cycle to respectively $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}$ and $Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ read ($\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x)

$$w_c^{\text{even}} = \lfloor p/2 \rfloor, \quad w_c^{\text{odd}} = \lfloor (p-1)/2 \rfloor, \quad (23)$$

if the non-trivial cluster is direct (if it is dual, permute the labels even and odd). In particular, $w_c^{\text{even}} = w_c^{\text{odd}}$ for p odd and we deduce that

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) \text{ for } p \text{ odd.} \quad (24)$$

Of course, Eq. (24) can be proved in a much more elementary way by noticing that for p odd the RSOS model is symmetric under the transformation $h \rightarrow p-h$, which exchanges the parity of the heights. This even implies the stronger statement $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}} = T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$. On the other hand, for p even, the transformation $h \rightarrow p-h$ does not change the parity, and $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}} \neq T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$; the two matrices do not even have the same dimension.

The purpose of presenting the longer argument leading to Eq. (24) is to make manifest that this relation breaks down for even p exactly because of configurations represented by degenerate Pasquier graphs. However a weaker relation holds true for any parity of p :

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = x^E Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x^{-1}). \quad (25)$$

Note that it implies, as a corollary, that Eq. (24) also holds for p even provided that $x = 1$.

To prove Eq. (25) we again argue configuration by configuration. Each cluster configuration is in bijection with a “shifted” configuration obtained by keeping fixed the coloured edges and moving the whole lattice by half a lattice spacing in both directions (or equivalently, exchanging the direct and dual vertices). The shifted configuration has the same Pasquier graph as the original one, except for an exchange of direct and dual vertices and thus of the parity of the heights on direct vertices. We conclude that w_c^{even} computed for the original configuration equals w_c^{odd} computed for the shifted configuration, and vice versa. This implies Eq. (25) upon noticing that the factors of x correct the weighing of the coloured direct edges (we have used that the sum of direct and dual coloured edges equals E).

Subtracting Eq. (25) from the relation obtained from Eq. (25) under $x \rightarrow x^{-1}$ gives a duality relation for $Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$:

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = -x^E (Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x^{-1}) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x^{-1})). \quad (26)$$

We shall now see that the left-hand side of this relation can be related to a difference of partition functions in the cluster picture.

D. A relation between RSOS and cluster partition functions

We have already mentioned above, in Eq. (20), that for a *planar* lattice Z_{cluster} can be written in terms of the boundaries (loops) that separate direct and dual clusters [9, 10]

$$Z_{\text{cluster}} = Q^{V/2} \sum_{\mathcal{C}} x^{e(\mathcal{C})} Q^{l(\mathcal{C})/2}, \quad (27)$$

where $l(\mathcal{C})$ is the number of cluster boundaries. This result is obtained from Eq. (2) by using the Euler relation for a planar graph, $l(\mathcal{C}) + V = 2c(\mathcal{C}) + e(\mathcal{C})$.

On a torus, things are slightly more complicated. The Euler relation must be replaced by

$$\begin{aligned} 2 + l(\mathcal{C}) + V &= 2c(\mathcal{C}) + e(\mathcal{C}) \text{ if a direct cluster spans both periodic directions,} \\ l(\mathcal{C}) + V &= 2c(\mathcal{C}) + e(\mathcal{C}) \text{ otherwise.} \end{aligned} \quad (28)$$

To prove Eq. (28) we proceed by induction. Initially, when \mathcal{C} is the state with no coloured direct edge, we have $l(\mathcal{C}) = c(\mathcal{C}) = V$ and $e(\mathcal{C}) = 0$, whence the second of the relations indeed holds true. Any other configuration \mathcal{C} can be obtained from the initial one by successively colouring direct edges (and uncolouring the corresponding dual edges). When colouring a further direct edge, there are several possibilities:

1. The edge joins two clusters which were formerly distinct. The changes in the parameters of Eq. (28) are then $\Delta l = -1$ (the outer boundaries of the two clusters join to form the outer boundary of the amalgamated cluster), $\Delta c = -1$ and $\Delta e = 1$. Thus, the changes to the left- and right-hand sides of Eq. (28) cancel out.
2. The edge joins two vertices which were already in the same cluster. Then $\Delta l = 1$ (the operation creates a cycle in the cluster which must then acquire an inner boundary), $\Delta c = 0$ and $\Delta e = 1$. This again maintains Eq. (28). The same changes are valid when the added edge makes the cluster wrap around the *first* of the two periodic directions: no inner boundary is created in this case, but the cluster's outer boundary breaks into two disjoint pieces.
3. The edge makes, for the first time, the cluster wrap around *both* periodic directions. Then $\Delta l = -1$ (the two outer boundaries coalesce), $\Delta c = 0$ and $\Delta e = 1$. Thus one jumps from the second to the first of the relations (28).

We conclude that on a torus, Eq. (27) must be replaced by

$$Z_{\text{cluster}} = Q^{V/2} \sum_{\mathcal{C}} x^{e(\mathcal{C})} Q^{l(\mathcal{C})/2 + \eta(\mathcal{C})}, \quad (29)$$

where, in the language of Pasquier graphs, $\eta(\mathcal{C}) = 1$ if $n = 0$ and the non-trivial cluster is *direct*, and $\eta(\mathcal{C}) = 0$ in all other cases. Note that n is the number of non-trivial cluster boundaries and $l - n$ the number of trivial boundaries.

Eq. (29) can be used to prove the following relation between RSOS and cluster partition functions:

$$(Q - 1) (Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x)) = Z_{\text{cluster}}(x) - x^E Z_{\text{cluster}}(x^{-1}) \text{ for } p \text{ even.} \quad (30)$$

Note that we do not claim the validity of Eq. (30) for p odd, since then the left-hand side vanishes by Eq. (24) whereas the right-hand side is in general non-zero. We also remark that for $p = 6$, Eq. (30) reduces to Eq. (12) which was conjectured based on numerical evidence in section II.

We now prove Eq. (30) by showing the each cluster configuration gives equal contributions to the left- and the right-hand sides. When evaluating the second term on the right-hand side we consider instead the shifted configuration. This ensures that the contribution to all terms in Eq. (30) yields the same power of x ; we therefore only the topological weight w (cf. Eq. (18) in the following argument.

The contribution of non-degenerate Pasquier graphs to the left-hand side of Eq. (30) is zero by Eq. (22) and the discussion preceding it. The contribution of such graphs to the right-hand side also vanishes, since the original and shifted configurations have the same number of cluster boundaries l , and in both cases $\eta = 0$ in Eq. (29).

Consider next the contribution of a degenerate Pasquier graph where the non-trivial cluster is *direct*. The contribution to the left-hand side of Eq. (30) is $(Q - 1)Q^{l/2}$, since from Eq. (23) $w_c^{\text{even}} - w_c^{\text{odd}} = 1$. As to the right-hand side, note that for the first term, $Z_{\text{cluster}}(x)$, we have $\eta = 1$ in Eq. (29), whereas for the second term, $x^E Z_{\text{cluster}}(x^{-1})$, we use the shifted configuration as announced, whence $\eta = 0$. The total contribution to the right-hand side of Eq. (30) is then $Q^{l/2+1} - Q^{l/2}$ as required.

When the non-trivial cluster is *dual* a similar argument can be given (there is a sign change on both sides); Eq. (30) has thus been proved.

Note that while Eq. (30) itself reduces to a tautology at the selfdual point $x = 1$, one can still obtain a non-trivial relation by taking derivatives with respect to x on both sides before setting $x = 1$. For example, deriving once one obtains for $x = 1$:

$$\langle e \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - \langle e \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{odd}} = 2Z_{\text{cluster}}((Q - 1)Z_{\text{RSOS}})^{-1}(\langle e \rangle_{\text{cluster}} - \langle e_{\text{dual}} \rangle_{\text{cluster}}) \quad (31)$$

where $e_{\text{dual}} = E - e$ is the number of coloured dual edges. Higher derivatives give relations involving higher moments of e and e_{dual} . Eq. (25) gives similar relations using the same procedure, for example:

$$\langle e \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{even}} = \langle e_{\text{dual}} \rangle_{\text{RSOS}}^{\text{odd}} \quad (32)$$

which can be proved directly considering shifted configurations.

E. Topology of the non-trivial clusters

In the following sections we consider twisted models, and it is necessary to be more careful concerning the topology of the non-trivial clusters.

Consider first the non-degenerate case, $n \neq 0$. Each of the boundaries separating two non-trivial clusters takes the form of a non-trivial, non-self intersecting loop on the torus. Assign to each of these loops an arbitrary orientation. The homotopy class of an oriented loop is then characterised by a pair of integers (i_1, i_2) , where i_1 (resp. i_2) indicates how many times the horizontal (resp. vertical) principal cycle of the torus is crossed in the positive direction upon traversing the oriented loop once. We recall a result [14] stating that 1) $|i_1|$ and $|i_2|$ are coprime (in particular they have opposite parities), and 2) the *relative* orientations of the non-trivial loops defined by a given cluster configuration can be chosen so that all the loops have the same (i_1, i_2) . Further, by a *global* choice of orientations, we can suppose that $i_1 \geq 0$. The sign of i_2 is then changed by taking an appropriate mirror image of the configuration; since this does not affect the weights in the cluster and RSOS models we shall henceforth suppose that $i_2 \geq 0$ as well.

By an abuse of language, we shall define the homotopy class of the non-trivial clusters by the same indices (i_1, i_2) that characterise the non-trivial loops. For example, clusters percolating only horizontally correspond to homotopy class $(1, 0)$, and clusters percolating only vertically correspond to class $(0, 1)$. Note that there are more complicated clusters which have both $i_1 > 0$ and $i_2 > 0$, and that if one of the indices is ≥ 2 the other must be ≥ 1 .

Finally, in the degenerate case $n = 0$, all the loops surrounded by the non-trivial cluster are actually trivial. The homotopy class of the cluster is then defined to be $(i_1, i_2) = (0, 0)$.

F. Twisted RSOS model

For even p , the RSOS model can be twisted by imposing the identification $h \rightarrow p - h$ upon crossing a horizontal seam, as already explained before Eq. (13). We refer to this as Z_2 type twisted boundary conditions.

Those new boundary conditions change the weights of the Pasquier graphs. The trivial clusters still have weight $Q^{1/2}$ (the seam can be locally deformed so as to avoid traversing these clusters), whereas the weight of the cycle w_c is modified.

Consider first the non-degenerate case $n \neq 0$. If a non-trivial cluster has i_2 odd (where i_2 corresponds to the direction perpendicular to the seam) its height h is fixed by $h = p - h$, whence $h = p/2$. But since $n \geq 2$, there must be both a direct and a dual cluster wrapping in this way, and since their heights have opposite parities they cannot both equal $p/2$. So such a configuration is incompatible with the Z_2 boundary conditions.

Suppose instead that $n > 0$ clusters (i.e., necessarily $n/2$ direct and $n/2$ dual) have i_2 even. The weight w_c is no longer given by Eq. (19), but rather by

$$w_c^{Z_2} = \text{Tr} [(G_{p-1})^n J_{p-1}], \quad (33)$$

where the matrix

$$J_{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & / & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

of dimension $p - 1$ implements the jump in height $h \rightarrow p - h$ due to the seam. It is easy to see that the matrices G_{p-1} and J_{p-1} commute (physically this is linked to the fact that the cut can be deformed locally) and thus have the same eigenvectors. These are of the form $|v_k\rangle = \{\sin(\pi k h/p)\}_{h=1,2,\dots,p-1}$. The corresponding eigenvalues of G_{p-1} read $\lambda_k = 2 \cos(\pi k/p)$ for $k = 1, 2, \dots, p-1$. Since the eigenvectors with k odd (resp. even) are symmetric (resp. antisymmetric) under the transformation $h \rightarrow p - h$, the eigenvalues of J_{p-1} are $(-1)^{k+1}$. We conclude that Eq. (19) must be replaced by

$$w_c^{Z_2} = \sum_{1 \leq k \leq p-1} (-1)^{k+1} (2 \cos(k\pi/p))^n \quad \text{for } n \neq 0. \quad (35)$$

For the degenerate case $n = 0$, one has simply $w_c^{Z_2} = 1$, since the height of the non-trivial cluster is fixed to $p/2$.

As in the untwisted sector we can impose given parities on the direct and dual clusters. This does not change the weighing of trivial clusters. For non-trivial clusters with $n \neq 0$ we have $w_c^{\text{even}, Z_2} = w_c^{\text{odd}, Z_2} = \frac{1}{2} w_c^{Z_2}$ for the same

reasons as in Eq. (22), but with $w_c^{Z_2}$ now given by Eq. (35). Finally, for $n = 0$ one finds for a direct non-trivial cluster

$$w_c^{\text{even}, Z_2} = p/2 \bmod 2, \quad w_c^{\text{odd}, Z_2} = 1 - p/2 \bmod 2. \quad (36)$$

For a dual non-trivial cluster, exchange the labels even and odd.

We have the following relation between the twisted and untwisted RSOS models:

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = (-1)^{p/2+1} \left(Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) - Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}(x) \right) \text{ for } p \text{ even.} \quad (37)$$

Indeed, the two sides are non-zero only because of parity effects in w_c when $n = 0$. The relation then follows by comparing Eqs. (23) and (36). Note that Eq. (37) generalises Eq. (13) which was conjectured based on numerical evidence in section II.

G. Highest eigenvalue of the twisted RSOS model

We now argue that the dominant eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$ coincides with a subdominant eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}(x)$ for any width L . We consider first the case of $p/2$ odd.

The configurations contributing to $Z_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$ are those in which non-trivial clusters have i_2 even, which includes in particular the degenerate case (the non-trivial cluster being direct or dual depending on the parity considered). In the limit where $L \ll N$, the typical configurations correspond therefore to degenerate configurations, with the non-trivial cluster being direct in the even sector and dual in the odd sector, see Eq. (36). Because of these parity effects, the dominant eigenvalues are not the same for both parities (except of course for $x = 1$).

For such degenerate configurations, the weights corresponding to the twisted and untwisted models are different, but since the difference $w_c^{\text{even}} - w_c^{\text{odd}}$ is the same independently of the twist, we have Eq. (37). Since the dominant eigenvalues do not cancel from the right-hand side of that relation, they also contribute to the left-hand side.

We can therefore write, in each parity sector, $Z_{\text{RSOS}}(x) \sim Z_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x) + Z_{\text{RSOS}}^0(x)$, where $Z_{\text{RSOS}}^0(x)$ accounts for configurations in which no cluster percolates horizontally (there will therefore be at least one, and in fact almost surely many, clusters percolating vertically). If this had been an exact identity, we could resolve on eigenvalues of the corresponding transfer matrices and conclude that the eigenvalues of $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$ form a proper subset of the eigenvalues of $T_{\text{RSOS}}(x)$. While it is indeed true that the leading eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$ belongs to the spectrum of $T_{\text{RSOS}}(x)$ (see Table I for a numerical check), this inclusion is not necessarily true for subdominant eigenvalues of $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$.

Finally note that the leading eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$ coincides with a *subdominant* eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}(x)$, as $Z_{\text{RSOS}}^0(x)$ dominates $Z_{\text{RSOS}}^{Z_2}(x)$.

In the case where $p/2$ is even, the difference $w_c^{\text{even}} - w_c^{\text{odd}}$ is the opposite between the twisted and untwisted models. Therefore, the conclusion is unchanged, except that the leading eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x)$ coincides with a subdominant eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x)$, and the leading eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}(x)$ coincides with a subdominant eigenvalue of $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x)$.

H. Twisted cluster model

We want to extend the partition functions $Z_{\text{spin}}^{Z_2}(x)$ and $Z_{\text{spin}}^{Z_3}(x)$, considered in section II by twisting the spin representation for $Q = 3$, to arbitrary values of Q . Within the cluster representation we introduce a horizontal seam. We define $Z_{\text{cluster}}^{Q_0=1}(x)$ by giving a weight 1 to the non-trivial direct clusters with i_2 odd and to degenerate cycles with a direct cluster percolating, while other direct clusters continue to have the weight Q . We define too $Z_{\text{cluster}}^{Q_0=0}(x)$ by giving a weight 0 to the non-trivial direct clusters with i_2 coprime with 3 and to degenerate cycles with a direct cluster percolating, while other direct clusters continue to have the weight Q . $Z_{\text{cluster}}^{Q_0=1}(x)$ and $Z_{\text{cluster}}^{Q_0=0}(x)$ are extensions to arbitrary real values of Q of, respectively, $Z_{\text{spin}}^{Z_2}(x)$ and $Z_{\text{spin}}^{Z_3}(x)$.

We have the following duality relation for the $Q_0 = 1$ model:

$$Z_{\text{cluster}}^{Q_0=1}(x) = x^E Z_{\text{cluster}}^{Q_0=1}(x^{-1}) \quad (38)$$

Indeed, for $Q_0 = 1$, the weight of a degenerate cycle is always 1, the cluster percolating being direct or dual. That is the reason why this equality is true, whereas it was false for the untwisted model because of the degenerate Pasquier graphs. For $Q = 3$, one retrieves Eq. (14).

For the $Q_0 = 0$ model, there is a duality relation of the form:

$$Z_{\text{cluster}}(x) - x^E Z_{\text{cluster}}(x^{-1}) = -(Q - 1) \left(Z_{\text{cluster}}^{Q_0=0}(x) - x^E Z_{\text{cluster}}^{Q_0=0}(x^{-1}) \right). \quad (39)$$

Indeed, the two sides are non-zero only because of the degenerate Pasquier graphs, so the relation follows by comparing weight of cycles in the twisted and untwisted models. Combining this equation with Eq. (30) enables us to relate the $Q_0 = 0$ twisted cluster model to the RSOS model:

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) - x^E Z_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x^{-1}) = - \left(Z_{\text{cluster}}^{Q_0=0}(x) - x^E Z_{\text{cluster}}^{Q_0=0}(x^{-1}) \right) \text{ for } p \text{ even.} \quad (40)$$

For $Q = 3$, this reduces to Eq. (15) as it should.

Note that these equations are correct because of the weight Q_0 chosen for degenerate cycles with a direct cluster percolating, so the partition functions of other models, with the same value of Q_0 but different weights for other configurations, would verify the same equations.

I. The Ising case

Let us now discuss in more detail the Ising case, $Q = 2$ and $p = 4$. In this case, the relationship between the RSOS and spin pictures is actually trivial, as the two transfer matrices are isomorphic. Consider for example $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x)$. All direct clusters have height $h_i = 2$, and dual clusters have $h_i = 1$ or 3 . The dual heights thus bijectively define Ising spin variables $S_i = 1$ or 2 on the dual vertices.

To examine the weight of a lattice face, we decide to redistribute the factor $Q^{L/2}$ in Eq. (4) as a factor of $Q^{1/2}$ for each V_i operator, i.e., on faces which are like in Fig. 1. If $h_{2i} = h'_{2i} = 1$ or 3 the weight is then $Q^{1/2}(x + S_1/S_2) = e^K$, and if $h_{2i} \neq h'_{2i}$ the weight is $Q^{1/2}S_1/S_2 = 1$. A similar reasoning holds on the faces associated with an H_i operator, this time with no extra factor of $Q^{1/2}$. So these are exactly the weights needed to define an Ising model on the dual vertices. Arguing in the same way in the odd RSOS sector, we conclude that

$$T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = T_{\text{spin}}(x), \quad T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}(x) = x^{2L} T_{\text{spin}}(x^{-1}), \quad (41)$$

cf. Eq. (10).

Using again the explicit relation between heights and (dual) spins, the Z_2 twist in the RSOS model is seen to be the standard Z_2 twist of the Ising model (antiperiodic boundary conditions for the spins). Since all local face weights are identical in the two models we have as well

$$T_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) = T_{\text{spin}}^{Z_2}(x), \quad T_{\text{RSOS}}^{\text{odd}, Z_2}(x) = x^{2L} T_{\text{spin}}^{Z_2}(x^{-1}). \quad (42)$$

J. The $Q = 3$ case

For $Q = 3$, we have conjectured an additional relation, given by Eq. (16), which we recall here:

$$Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) + Z_{\text{RSOS}}^{\text{even}, Z_2}(x) = Z_{\text{spin}}(x) + Z_{\text{spin}}^{Z_2}(x) \quad (43)$$

This equation can be proved by considering the weights of all kinds of Pasquier graphs that one might have. The contribution of non-degenerate Pasquier graphs with clusters percolating vertically is $w = Q^{(l-n)/2}(Q^{n/2} + 1)$ on both sides. The contribution of non-degenerate Pasquier graphs with clusters percolating horizontally is $2Q^{(l-n)/2}Q^{l/2}$. The contribution of degenerate Pasquier graphs is $Q^{l/2}(Q + 1)$ if the non-trivial cluster is direct, and $2Q^{l/2}$ if the non-trivial cluster is dual. Note that this relation cannot be extended to other values of p , as we used the explicit expressions for the eigenvalues of G_5 and that $p/2 = Q$ and $(p - 2)/2 = 2$.

IV. DISCUSSION

In this paper we have studied the subtle relationship between Potts and RSOS model partition functions on a square-lattice torus. The subtleties come from clusters of non-trivial topology, and in particular from those that wind around *both* of the periodic directions. Treating these effects by means of rigorous combinatorial considerations on the associated Pasquier graphs has produced a number of exact identities, valid on finite $L \times N$ tori and for any value of the temperature variable $x = Q^{-1/2}(e^K - 1)$. These identities link partition functions in the RSOS and cluster representations of the Temperley-Lieb algebra, in various parity sectors and using various twisted versions of the periodic boundary conditions.

Our main results are given in Eqs. (25), (30), (37), (38), (40) and (43). At the selfdual (critical) point $x = 1$, some of these relations reduce to tautologies, but taking derivatives of the general relations with respect to x before setting $x = 1$ nevertheless produces non-trivial identities, such as Eq. (31).

Note that we have proved the identities on the level of partition functions, but the fact that they are valid for any N means that there are strong implications for the eigenvalues of the transfer matrices. Let us write for a given partition function $Z(x) = \sum_i \alpha_i (\Lambda_i(x))^N$, where (for a given width L) $\Lambda_i(x)$ are the eigenvalues of the corresponding transfer matrix and α_i their multiplicities. Consider now, as an example, Eq. (30) for $Q > 1$ integer. Since it is valid for any N , we have that the multiplicities satisfy

$$(Q - 1)(\alpha_{\text{RSOS}}^{\text{even}} - \alpha_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}) = \alpha_{\text{spin}} - \alpha_{\text{spin}}^{\text{dual}} \quad (44)$$

for any eigenvalue. For instance, if $\alpha_{\text{RSOS}}^{\text{even}} > \alpha_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ we can conclude that the corresponding eigenvalue also appears at least in $T_{\text{spin}}(x)$, and possibly also in $T_{\text{spin}}^{\text{dual}}(x)$ with a smaller multiplicity. The possibility that for some eigenvalues $\alpha_{\text{RSOS}}^{\text{even}} = \alpha_{\text{RSOS}}^{\text{odd}}$ explains why only some but not *all* the eigenvalues of the transfer matrices contributing to the individual terms in Eq. (30) coincide. Similar considerations can of course be applied to our other identities. For example, considering Eq. (37), one deduces that the eigenvalues of the RSOS transfer matrix with a different multiplicity between the even and odd sectors are eigenvalues of the twisted RSOS transfer matrix.

The methods and results of this paper can straightforwardly be adapted to other boundary conditions (e.g., with twists in both periodic directions) or to other lattices (in which case the relations will typically link partition functions on two different, mutually dual lattices).

It is of interest to point out the operator content of the twisted boundary conditions that we have treated. We here consider only the case $x = 1$ for which the continuum limit of the RSOS model is [6, 15] the unitary minimal model $\mathcal{M}_{p,p-1}$. By standard conformal techniques, the ratio of twisted and untwisted partition functions on a cylinder can be linked to two-point correlation function of primary operators.

In the case of the Z_2 twist of the RSOS model (which is possible only for even p) the relevant primary operator is $\phi_{p/2,p/2}$, the magnetic operator of the Potts model, of conformal weight $h_{p/2,p/2} = \frac{p^2-4}{16p(p-1)}$. To see this, first note that the argument given in section III G implies that the ratio of partition functions is proportional to the probability that both endpoints of the Z_2 seam are contained in the same (dual) cluster. As we are at the selfdual point ($x = 1$) we may as well refer to a direct cluster. Now this probability is proportional to both the connected spin-spin correlation function (in the spin or cluster formulations) and to the connected height-height correlation function (in the RSOS formulation). The corresponding decay exponent is then the conformal weight $h_{p/2,p/2}$ of the magnetisation operator.

For the special case of $p = 6$ ($Q = 3$) we have also discussed Z_2 and Z_3 type twists in the spin representation. The former is linked to the operator $\phi_{2,2}$ of conformal weight $h_{2,2} = \frac{1}{40}$, and the latter is linked to $\phi_{4,4}$ with $h_{4,4} = \frac{1}{8}$. The astute reader will notice that both operators are actually not present in the 3-state Potts model but belong to the larger Kac table of the minimal model $\mathcal{M}_{6,5}$. This is consistent with the fact that the RSOS model with parameter p is precisely [6] a microscopic realisation of the minimal model $\mathcal{M}_{p,p-1}$. In other words, the two types of twists generate operators which cannot be realised by fusing local operators in the spin model, but are nevertheless local operators in the RSOS model.

The operators $\phi_{2,2}$ and $\phi_{4,4}$ are most conveniently represented as the two types of fundamental disorder operators [16] in the Z_3 symmetric parafermionic theory (the coset $su(2)_3/u(1)$) which is an extended CFT realisation of $\mathcal{M}_{6,5}$. More precisely, in the notation of Eq. (3.38) in Ref. [16] we have $h_{4,4} = \Delta_{(0)} = \frac{1}{8}$ and $h_{2,2} = \Delta_{(1)} = \frac{1}{40}$.

Finally note that $T_{\text{RSOS}}^{Z_2}$ contains levels which are not present in T_{RSOS} , cf. Table I. Thus, at $x = 1$ the corresponding operator content is different from that of $\mathcal{M}_{p,p-1}$. In particular, correlation functions must be defined on a two-sheet Riemann sphere, and we expect half-integer gaps in the spectrum. This expectation is indeed brought out by our numerical investigations: for $p = 6$ the second scaling level in the twisted sector is a descendant of $\phi_{2,2}$ at level $1/2$. These issues will be discussed further elsewhere.

-
- [1] F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).
 - [2] H. Saleur, Nucl. Phys. B **360**, 219 (1991).
 - [3] P. W. Kasteleyn and C. M. Fortuin, J. Phys. Soc. Jap. (suppl.) **26**, 11 (1969).
 - [4] G. E. Andrews, R. J. Baxter and P. J. Forrester, J. Stat. Phys. **35**, 193 (1984).
 - [5] V. Pasquier, J. Phys. A **20**, 1229 (1987).
 - [6] V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. B **320**, 523 (1989).
 - [7] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb, Proc. Roy. Soc. London A **322**, 251 (1971).
 - [8] H. W. J. Blöte and M. P. Nightingale, Physica A **112**, 405 (1982).
 - [9] R. J. Baxter, S. B. Kelland and F. Y. Wu, J. Phys. A **9**, 397 (1976).

- [10] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Academic Press, New York, 1982).
- [11] J. L. Jacobsen and J. Salas, cond-mat/0407444.
- [12] H. Saleur and M. Bauer, Nucl. Phys. B **320**, 591 (1989).
- [13] J. Salas and A. D. Sokal, J. Stat. Phys. **104**, 609 (2001).
- [14] P. Di Francesco, H. Saleur and J. B. Zuber, J. Stat. Phys. **49**, 57 (1987).
- [15] D. A. Huse, Phys. Rev. B **30**, 3908 (1984).
- [16] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Sov. Phys. JETP **63**, 913 (1986).
- [17] It is however possible to modify the cluster representation itself, and hence the transfer matrix, in a non-local way that allows to write Z_{cluster} as a suitably modified trace [11].
- [18] This definition of parity may appear somewhat strange; it is motivated by the fact that it implies $T_{\text{RSOS}}^{\text{even}}(x) = T_{\text{spin}}(x)$ for the Ising case $p = 4$, cf. Eq. (41).
- [19] It is amusing to rephrase the result (22) in terms of Dynkin diagrams. Let n_i be the number of closed paths of length $2k$ on A_{p-1} , starting and ending at site i . Then Eq. (22) amounts to $\sum_{i \text{ even}} n_i = \sum_{i \text{ odd}} n_i$. For p odd this is obvious, since $n_i = n_{p-i}$ by the Z_2 symmetry of A_{p-1} ; however for p even this is a non-trivial statement (though straightforward to prove, using generating function techniques for example).

Complex-temperature phase diagram of Potts and RSOS models

Jesper Lykke Jacobsen^{1,2}, Jean-François Richard^{1,3}, and Jesús Salas⁴

¹*Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques
Université Paris-Sud
Bâtiment 100
91405 Orsay, FRANCE
JACOBSEN@IPNO.IN2P3.FR*

²*Service de Physique Théorique
CEA Saclay
Orme des Merisiers
91191 Gif sur Yvette, FRANCE*

³*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies
Université Paris VI
Boîte 126, Tour 24, 5^e étage
4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05, FRANCE
JRICHARD@LPHE.JUSSIEU.FR*

⁴*Grupo de Modelización, Simulación Numérica y Matemática Industrial
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid
Avda. de la Universidad, 30
28911 Leganés, SPAIN
JSALAS@MATH.UC3M.ES*

October 25, 2005

Revised Jan 18, 2006

Abstract

We study the phase diagram of Q -state Potts models, for $Q = 4 \cos^2(\pi/p)$ a Beraha number ($p > 2$ integer), in the complex-temperature plane. The models are defined on $L \times N$ strips of the square or triangular lattice, with boundary conditions on the Potts spins that are periodic in the longitudinal (N) direction and free or fixed in the transverse (L) direction. The relevant partition functions can then be computed as sums over partition functions of an A_{p-1} type RSOS model, thus making contact with the theory of quantum groups. We compute the accumulation

sets, as $N \rightarrow \infty$, of partition function zeros for $p = 4, 5, 6, \infty$ and $L = 2, 3, 4$ and study selected features for $p > 6$ and/or $L > 4$. This information enables us to formulate several conjectures about the thermodynamic limit, $L \rightarrow \infty$, of these accumulation sets. The resulting phase diagrams are quite different from those of the generic case (irrational p). For free transverse boundary conditions, the partition function zeros are found to be dense in large parts of the complex plane, even for the Ising model ($p = 4$). We show how this feature is modified by taking fixed transverse boundary conditions.

Key Words: Potts model, RSOS model, Beraha number, limiting curve, quantum groups

1 Introduction

The Q -state Potts model [1, 2] can be defined for general Q by using the Fortuin–Kasteleyn (FK) representation [3, 4]. The partition function $Z_G(Q; v)$ is a polynomial in the variables Q and v . This latter variable is related to the Potts model coupling constant J as

$$v = e^J - 1. \quad (1.1)$$

It turns out useful to define the temperature parameter x as

$$x = \frac{v}{\sqrt{Q}} \quad (1.2)$$

and to parameterize the interval $Q \in (0, 4]$ as

$$Q = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right), \quad p \in (2, \infty]. \quad (1.3)$$

For generic¹ values of Q , the main features of the phase diagram of the Potts model in the real (Q, x) -plane have been known for many years [2, 5]. It contains in particular a curve $x_{\text{FM}}(Q) > 0$ of ferromagnetic phase transitions which are second-order in the range $0 < Q \leq 4$, the thermal operator being relevant. The analytic continuation of the curve $x_{\text{FM}}(Q)$ into the antiferromagnetic regime yields a second critical curve $x_{\text{BK}}(Q) < 0$ with $0 < Q < 4$ along which the thermal operator is irrelevant. Therefore, for a fixed value of Q , the critical point $x_{\text{BK}}(Q)$ acts as the renormalization group (RG) attractor of a finite range of x values: this is the Berker-Kadanoff (BK) phase [6, 7].

The generic phase diagram is shown in Fig. 1. Since the infinite-temperature limit ($x = 0$) and the zero-temperature ferromagnet ($|x| = \infty$) are of course RG attractive, consistency of the phase diagram requires that the BK phase be separated from these by a pair of RG repulsive curves $x_{\pm}(Q) < 0$. The curve $x_+(Q)$ is expected to correspond to the antiferromagnetic (AF) phase transition of the model [8].

The above scenario thus essentially relies on the RG attractive nature of the curve $x_{\text{BK}}(Q)$, and since this can be derived [5] from very general Coulomb gas considerations, the whole picture should hold for any two-dimensional lattice. But it remains of course of great interest to compute the exact functional forms of the curves $x_{\text{FM}}(Q)$, $x_{\text{BK}}(Q)$, and $x_{\pm}(Q)$ —and the corresponding free energies—for specific lattices.

The square-lattice Potts model is the best understood case. Here, Baxter [2, 9] has found the exact free energy along several curves $x = x_c(Q)$:

$$x_c(Q) = \begin{cases} +1 & \text{(FM)} \\ -\frac{2}{\sqrt{Q}} + \sqrt{\frac{4-Q}{Q}} & \text{(AF)} \\ -1 & \text{(BK)} \\ -\frac{2}{\sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{4-Q}{Q}} & \text{(AF)} \end{cases} \quad (1.4)$$

¹More precisely, a “generic” value of Q corresponds to an irrational value of the parameter p defined in Eq. (1.3). This point will be made more precise in Section 2 below.

where $x_c = 1$ and $x_c = -1$ can be identified respectively with $x_{\text{FM}}(Q)$ and $x_{\text{BK}}(Q)$. The curves $x_{\pm} = -2/\sqrt{Q} \pm \sqrt{(4-Q)/Q}$ are mutually dual (and hence equivalent) curves of AF phase transitions, which are again second-order in the range $0 < Q \leq 4$. These curves also form the boundaries of the x -values controlled by the BK fixed point [7], as outlined above. Note that the four points $x_c(q)$ in Eq. (1.4) correspond to the points where the circles

$$|x| = 1 \quad (1.5a)$$

$$\left| x + \frac{2}{\sqrt{Q}} \right| = \sqrt{\frac{4-Q}{Q}} \quad (1.5b)$$

cross the real x -axis. These two circles intersect at the points

$$x = -e^{\pm i\pi/p} \quad (1.6)$$

which will be shown below to play a particular role in the phase diagram (see Conjecture 4.1.1).

In the case of a triangular lattice, Baxter and collaborators [10–12] have found the free energy of the Potts model along the curves

$$\sqrt{Q}x^3 + 3x^2 = 1, \quad (1.7a)$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{Q}}. \quad (1.7b)$$

The upper branch of Eq. (1.7a) is identified with the ferromagnetic critical curve $x_{\text{FM}}(Q)$. We have numerical evidence that the middle and lower branches correspond respectively to $x_{\text{BK}}(Q)$ and $x_{-}(Q)$, the lower boundary of the BK phase. The position of $x_{+}(Q)$, the upper branch of the BK phase, is at present unknown [13] (but see Ref. [14] for the $Q \rightarrow 0$ limit). Along the line (1.7b) the Potts model reduces to a coloring problem, and the partition function is here known as the chromatic polynomial. The line (1.7b) belongs to the RG basin of the BK phase for $0 < Q < 2 + \sqrt{3}$ [15].

The critical properties—still with Q taking generic values—for these two lattices are to a large extent universal. This is not so surprising, since the critical exponents can largely be obtained by Coulomb gas techniques (although the antiferromagnetic transition still reserves some challenges [8]). Thus, there is numerical evidence that the exponents along the curves $x_{\text{FM}}(Q)$, $x_{\text{BK}}(Q)$ and $x_{-}(Q)$ coincide, whereas the evidence for the curve $x_{+}(Q)$ is non-conclusive [14]. On the other hand, on the less-studied triangular lattice we cannot yet exclude the possible existence of other curves of second-order phase transitions that have no counterpart on the square lattice.

But in general we can only expect universality to hold when the Boltzmann weights in the FK representation are non-negative (i.e., for $Q \geq 0$, $v \geq 0$), or when the parameter p takes generic (i.e., irrational) values. The present paper aims at studying the situation when p takes non-generic values; for simplicity we limit ourselves to the case of integer

$p > 2$. The number of spin states is then equal to a so-called Beraha number B_p

$$Q = B_p = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right), \quad p = 3, 4, 5, \dots \quad (1.8)$$

The special physics at rational values of p is intimately linked to the representation theory of the quantum group $U_q(SU(2))$, the commutant of the Temperley-Lieb algebra, when the deformation parameter q is a root of unity. As we shall review in Section 2 below, the quantum group symmetry of the Potts model at rational p implies that many eigenvalues of the transfer matrix in the FK representation have zero amplitude or cancel in pairs because of opposite amplitudes; these eigenvalues therefore become spurious and do not contribute to the partition function [6, 7].

Remarkably, for p integer and x inside the BK phase, even the leading eigenvalue acquires zero amplitude. Moreover, all the eigenvalues which scale like the leading one in the thermodynamic limit vanish from the partition function, and so, even the bulk free energy $f(p; x)$ is modified [8]. In other words, $f(p; x)$ experiences a singularity whenever p passes through an integer value. This means in particular that for p integer the critical behavior can either disappear, or be modified, or new critical points (and other non-critical fixed points) can emerge.

For the sake of clarity, we discuss the simplest example of this phenomenon. Consider, on the square lattice, on one hand the $Q \rightarrow 2$ state model (i.e., with Q tending to 2 through irrational values of p) and on the other the $Q = 2$ Ising model (i.e., with fixed integer $p = 4$). For the former case, the generic phase diagram and the associated RG flows are shown in the top part of Fig. 2. The three critical points x_{FM} and x_{\pm} have central charge $c = 1/2$, while the fourth one x_{BK} has $c = -25/2$. For the latter case, new non-critical fixed points appear (by applying the duality and Z_2 gauge symmetries to the one at $x = 0$), and the RG flows become as shown in the bottom part of Fig. 2. One now has $c = 1/2$ for all four critical fixed points. (We shall treat the Ising model in more detail in Section 7.1 below.)

By contrast to the universality brought out for generic Q , the phase diagram and critical behavior for integer p is likely to have lattice dependent features. Let us give a couple of examples of this non-universality. The zero-temperature triangular-lattice Ising antiferromagnet, $(Q, v) = (2, -1)$, is critical and becomes in the scaling limit a free Gaussian field with central charge $c = 1$ [16–18], whereas the corresponding square-lattice model is non-critical, its partition function being trivially $Z = 2$. While this observation does not in itself imply non-universality, since the critical temperature is expected to be lattice dependent (as is the value of $x_{\text{FM}}(Q)$), the point to be noticed is that for no value of v does the $Q = 2$ square-lattice model exhibit $c = 1$ critical behavior. In the same vein, the square-lattice Potts model with $(Q, v) = (3, -1)$ is equivalent to a critical six-vertex model (at $\Delta = 1/2$) [19, 20], with again $c = 1$ in the scaling limit, whereas now the corresponding triangular-lattice model is trivial ($Z = 3$). Now, the triangular-lattice model does in fact exhibit $c = 1$ behavior elsewhere (for $x = x_-$), but the compactification radius is different from that of the square-lattice theory and accordingly the critical exponents differ. Finally, $(Q, v) = (4, -1)$ is a critical $c = 2$

theory on the triangular lattice [21, 22], but is non-critical on the square lattice [23].

Because of the eigenvalue cancellation scenario sketched above, the FK representation is not well suited² for studying the Potts model at integer p . Fortunately, for $Q = B_p$ there exists another representation of the Potts model, in terms of an RSOS model of the A_{p-1} type [24], in which the cancellation phenomenon is explicitly built-in, in the sense that for generic values of x all the RSOS eigenvalues contribute to the partition function. On the square lattice, the RSOS model has been studied in great detail [24–27] at the point $x = x_{\text{FM}} = 1$, where the model happens to be homogeneous. Only very recently has the case of general real $x \neq 1$ (where the RSOS model is staggered, i.e., its Boltzmann weights are sublattice dependent) attracted some attention [8], and no previous investigation of other lattices (such as the triangular lattice included in the present study) appears to exist.

The very existence of the RSOS representation has profound links [27, 28] to the representation theory of the quantum group $U_q(SU(2))$ where the deformation parameter q defined by

$$Q = (q + q^{-1})^2 = B_p, \quad q = \exp(i\pi/p), \quad (1.9)$$

is a root of unity. To ensure the quantum group invariance one needs to impose periodic boundary conditions along the transfer direction. Further, to ensure the exact equivalence between Potts and RSOS model partition functions the transverse boundary conditions must be non-periodic.³ For definiteness we shall therefore study square- or triangular-lattice strips of size $L \times N$ spins, with periodic boundary conditions in the N -direction. The boundary conditions in the L -direction are initially taken as free, but we shall later consider fixed transverse boundary conditions as well. For simplicity we shall henceforth refer to these boundary conditions as free cyclic and fixed cyclic.⁴

Using the RSOS representation we here study the phase diagram of the Potts model at $Q = B_p$ through the loci of partition function zeros in the complex x -plane. According to the Beraha-Kahane-Weiss theorem [30], when $N \rightarrow \infty$, the accumulation points of these zeros form either isolated limiting points (when the amplitude of the dominant eigenvalue vanishes) or continuous limiting curves \mathcal{B}_L (when two or more dominant eigenvalues become equimodular); we refer to Ref. [32] for further details. In the RSOS representation only the latter scenario is possible, since all amplitudes are strictly positive.⁵ As usual in such studies, branches of \mathcal{B}_L that traverse the real x -axis for finite L ,

²We here tacitly assume that the study relies on a transfer matrix formulation. This is indeed so in most approaches that we know of, whether they be analytical or numerical. An exception would be numerical simulations of the Monte Carlo type, but in the most interesting parts of the phase diagram this approach would probably not be possible anyway, due to the presence of negative Boltzmann weights.

³There are however some intriguing relationships between modified partition functions with fully periodic boundary conditions [29]. We believe that the RSOS model with such boundary conditions merits a study similar to the one presented here, independently of its relation to the Potts model.

⁴It is convenient to introduce the notation $L_F \times N_P$ (resp. $L_X \times N_P$) for a strip of size $L \times N$ spins with free (resp. fixed) cyclic boundary conditions.

⁵Sokal [31, Section 3] has given a slight generalization of the Beraha-Kahane-Weiss theorem. In particular, when there are two or more equimodular dominant eigenvalues, the set of accumulation points of the partition-function zeros may include isolated limiting points when *all* the eigenvalues vanish

or “pinch” it asymptotically in the thermodynamic limit $L \rightarrow \infty$, signal the existence of a phase transition. Moreover, the finite-size effects and the impact angles [33] give information about the nature of the transition.

The limiting curves \mathcal{B}_L constitute the boundaries between the different phases of the model. Moreover, in the present set-up, each phase can be characterized topologically by the value of the conserved quantum group spin S_z , whose precise definition will be recalled in Section 2 below. (A similar characterization of phases of the chromatic polynomial was recently exploited in Ref. [34], but in the FK representation). One may think of S_z as a kind of “quantum” order parameter. A naive entropic reasoning would seem to imply that for any real x the ground state (free energy) has $S_z = 0$, since the corresponding sector of the transfer matrix has the largest dimension. It is a most remarkable fact that large portions of the phase diagram turn out have $S_z \neq 0$.

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L in the complex x -plane completely for $p = 4, 5, 6, \infty$ and $L = 2, 3, 4$ for both lattices. Moreover, we have studied selected features thereof for $p > 6$ and/or $L > 4$. This enables us to formulate several conjectures about the topology of \mathcal{B}_L which are presumably valid for any L , and therefore, provides information about the thermodynamic limit $L \rightarrow \infty$. The resulting knowledge is a starting point for gaining a better understanding of the fixed point structure and renormalization group flows in these Potts models.

Our work has been motivated in particular by the following open issues:

1. As outlined above, the eigenvalue cancellation phenomenon arising from the quantum group symmetry at integer p modifies the bulk free energy in the Berker-Kadanoff phase. For the Ising model we have seen that this changes the RG nature (from attractive to repulsive) of the point x_{BK} as well as its critical exponents (from $c = -25/2$ to $c = 1/2$). But for general integer p it is not clear whether x_{BK} will remain a phase transition point, and assuming this to be the case what would be its properties.
2. The chromatic line $x = -1/\sqrt{Q}$ does not appear to play any particular role in the generic phase diagram of the square-lattice model. By contrast, it is an integrable line [11, 12] for the generic triangular-lattice model. Qua its role as the zero-temperature antiferromagnet one could however expect the chromatic line to lead to particular (and possibly critical) behavior in the RSOS model. Even when critical behavior exists in the generic case (e.g., on the triangular lattice) the nature of the transition may change when going to the case of integer p (e.g., from $c = -25/2$ for the $Q \rightarrow 2$ model to $c = 1$ for the zero-temperature Ising antiferromagnet).
3. Some features in the antiferromagnetic region might possibly exhibit an extreme dependence on the boundary conditions, in line with what is known, e.g., for the six-vertex model. It is thus of interest to study both free and fixed boundary conditions.

simultaneously. See Section 3.1.1 for an example of this possibility.

To give but one example of what may be expected, we have discovered—rather surprisingly—that with free cyclic boundary conditions the partition function zeros are actually dense in substantial parts of the complex plane: this is true even for the simplest case of the square-lattice Ising model.

4. A recent numerical study [8] of the effective central charge of the RSOS model with periodic boundary conditions, as a function of x , has revealed the presence of new critical points inside the BK phase. In particular, strong evidence was given for a physical realization of the integrable flow [35] from parafermion to minimal models. The question arises what would be the location of these new points in the phase diagram.
5. In the generic case, the spin S_z of the ground state may be driven to arbitrary large values upon approaching the point $(Q, x) = (4, -1)$ from within the BK phase [7, 34]. Is a similar mechanism at play for integer p ?

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce the RSOS models and describe their precise relationship to the Potts model, largely following Refs. [24, 27, 28]. We then present, in Section 3, the limiting curves found for the square-lattice model with free cyclic boundary conditions, leading to the formulation of several conjectures in Section 4. Sections 5–6 repeat this programme for the triangular-lattice model. In Section 7 we discuss the results for free cyclic boundary conditions, with special emphasis on the thermodynamic limit, and motivate the need to study also fixed cyclic boundary conditions. This is then done in Sections 8–9. Finally, Section 10 is devoted to our conclusions. An appendix gives some technical details on the dimensions of the transfer matrices used.

2 RSOS representation of the Potts model

The partition function of the two-dimensional Potts model can be written in several equivalent ways, though sometimes with different domains of validity of the relevant parameters (notably Q). The interplay between these different representations is at the heart of the phenomena we wish to study.

The *spin representation* for Q integer is well-known. Its low-temperature expansion gives the *FK representation* [3, 4] discussed in the Introduction, where Q is now an arbitrary complex number. The (interior and exterior) boundaries of the FK clusters, which live on the medial lattice, yield the equivalent loop representation with weight $Q^{1/2}$ per loop.

An *oriented loop representation* is obtained by independently assigning an orientation to each loop, with weight q (resp. q^{-1}) for counterclockwise (resp. clockwise) loops, cf. Eq. (1.9). In this representation one can define the spin S_z along the transfer direction (with parallel/antiparallel loops contributing $\pm 1/2$) which acts as a conserved quantum number. Note that $S_z = j$ means that there are *at least* j non-contractible loops, i.e.,

loops that wind around the periodic (N) direction of the lattice. The weights $q^{\pm 1}$ can be further redistributed locally, as a factor of $q^{\alpha/2\pi}$ for a counterclockwise turn through an angle α [2]. While this redistribution correctly weights contractible loops, the non-contractible loops are given weight 2, but this can be corrected by twisting the model, i.e., by inserting the operator q^{S_z} into the trace that defines the partition function.

A partial resummation over the oriented-loop splittings at vertices which are compatible with a given orientation of the edges incident to that vertex now gives a *six-vertex model representation* [36]. Each edge of the medial lattice then carries an arrow, and these arrows are conserved at the vertices: the net arrow flux defines S_z as before. The six-vertex model again needs twisting by the operator q^{S_z} to ensure the correct weighing in the $S_z \neq 0$ sectors. The Hamiltonian of the corresponding spin chain can be extracted by taking the anisotropic limit, and is useful for studying the model with the Bethe Ansatz technique [2]. The fact that this Hamiltonian commutes with the generators of the quantum group $U_q(SU(2))$ links up with the nice results of Saleur and coworkers [6, 7, 27, 28].

Finally, the *RSOS representation* [24, 27, 28] emerges from a certain simplification of the above representations when $q = \exp(i\pi/p)$ is a root of unity (see below).

All these formulations of the Potts model can be conveniently studied through the corresponding transfer matrix spectra: these give access to the limiting curves \mathcal{B}_L , correlation functions, critical exponents, etc.

In the FK representation the transfer matrix $\mathsf{T}_{\text{FK}}^{(2)}(L)$ is written in a basis of connectivities (set partitions) between *two* time slices of the lattice (see Ref. [34] for details), and the transfer matrix propagates just one of the time slices. Each independent connection between the two slices is called a bridge; the number of bridges j is a semi-conserved quantum number in the sense that it cannot increase upon action of the transfer matrix. The bridges serve to correctly weight the clusters that are non-contractible with respect to the cyclic boundary conditions.⁶ This is accomplished by writing the partition function as

$$Z_{\text{FK}} = \langle f | \mathsf{T}_{\text{FK}}^{(2)}(L)^N | i \rangle = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \lambda_i^N \quad (2.1)$$

for suitable initial and final vectors $|i\rangle$ and $\langle f|$. The vector $|i\rangle$ identifies the two time slices, while $\langle f|$ imposes the periodic boundary conditions (it “reglues” the time slices) and weighs the resulting non-contractible clusters. Note that these vectors conspire to multiply the contribution of each eigenvalue λ_i by an amplitude $\alpha_i = \alpha_i(Q)$: this amplitude may vanish for certain values of Q .

On the other hand, in the six-vertex representation the transfer matrix is written in the purely *local* basis of arrows, whence the partition function can be obtained as a trace (which however has to be twisted by inserting q^{S_z} as described above). But even

⁶In particular, the restriction of $\mathsf{T}_{\text{FK}}^{(2)}(L)$ to the zero-bridge sector is just the usual transfer matrix T_{FK} in the FK representation, i.e., the matrix used in Ref. [32] to study the case of fully free boundary conditions.

without the twist the eigenvalues are still associated with non-trivial amplitudes, as we now review.

Let us consider first a generic value of q , i.e., an irrational value of p . The $U_q(SU(2))$ symmetry of the spin chain Hamiltonian implies that one can classify eigenvalues according to their value j of S_z , and consider only highest weights of spin j . Define now $K_{1,2j+1}(p, L; x)$ as the generating function of the highest weights of spin j , for given values of p , L and x . The partition function of the untwisted six-vertex model with the spin S (not S_z) fixed to j is therefore $(2j+1) K_{1,2j+1}(p, L; x)$. Imposing the twist, the corresponding contribution to the partition function of the Potts model becomes $S_j(p) K_{1,2j+1}(p, L; x)$, where the q -deformed number $S_j(p) \equiv (2j+1)_q$ is defined as follows

$$S_j(p) = \frac{\sin(\pi(2j+1)/p)}{\sin(\pi/p)}. \quad (2.2)$$

S has a simple interpretation in the FK representation as the number of bridges, whereas it is S_z which has a simple interpretation in the six-vertex model representation as the conserved current.

Different representations correspond to choosing different basis states: a given cluster state is an eigenvector of S , but not S_z , and a given vertex state is an eigenvector of S_z , but not S . The eigenvectors of the Hamiltonian are eigenvectors of both S and S_z , and are thus combinations of vertex states (or of cluster states if one works in the FK representation). But note that the dimensions of the transfer matrix are not exactly the same in the vertex and the FK representations, as the $2j+1$ possible values of S_z for a given $S = j$ are not taken into account in the same way: in the vertex representation, it corresponds to a degeneracy of the eigenvalues, whereas in the FK representation it appears because of the initial and final vectors which sandwich the transfer matrix in Eq. (2.1).

The total partition function of the Q -state Potts model on a strip of size $L_F \times N_P$ can therefore be *exactly* written as [24, 27, 28]

$$Z_{L_F \times N_P}(Q; v) = Q^{LN/2} \sum_{j=0}^L S_j(p) K_{1,2j+1}(p, L; x) \quad (2.3)$$

Note that the summation is for $0 \leq j \leq L$, as the maximum number of bridges is equal to the strip width L .

For p rational, Eq. (2.3) is still correct, but can be considerably simplified. In the context of this paper we only consider the simplest case of p integer. Indeed, note that using Eq. (2.2), we obtain that, for any integer n ,

$$S_{(n+1)p-1-j}(p) = -S_j(p) \quad (2.4a)$$

$$S_{np+j}(p) = S_j(p). \quad (2.4b)$$

Therefore, after factorization, Eq. (2.3) can be rewritten as

$$Z_{L_F \times N_P}(Q; v) = Q^{LN/2} \sum_{j=0}^{\lfloor (p-2)/2 \rfloor} S_j(p) \chi_{1,2j+1}(p, L; x), \quad (2.5)$$

where

$$\chi_{1,2j+1}(p, L; x) = \sum_{n \geq 0} [K_{1,2(np+j)+1}(p, L; x) - K_{1,2((n+1)p-1-j)+1}(p, L; x)] . \quad (2.6)$$

For convenience in writing Eq. (2.6) we have defined $K_{1,2j+1}(p, L; x) \equiv 0$ for $j > L$. Note that the summation in Eq. (2.5) is now for $0 \leq j \leq \lfloor (p-2)/2 \rfloor$. Furthermore, $\chi_{1,2j+1}(p, L; x)$ is a lot simpler than it seems. Indeed, when p is integer, the representations of $U_q(SU(2))$ mix different values of j related precisely by the transformations $j \rightarrow j + np$ and $j \rightarrow (n+1)p - 1 - j$ [cf. Eq. (2.4)]. Therefore, a lot of eigenvalues cancel each other in Eq. (2.6). This is exactly why the transfer matrix in the FK representation contains spurious eigenvalues, and is not adapted to the case of p integer.

The representation adapted to the case of p integer is the so-called RSOS representation. It can be proved that $\chi_{1,2j+1}$ is the partition function of an RSOS model of the A_{p-1} type [24] with given boundary conditions [27] (see below). In this model, heights $h_i = 1, 2, \dots, p-1$ are defined on the union of vertices and dual vertices of the original Potts spin lattice. Neighboring heights are restricted to differ by ± 1 (whence the name RSOS = restricted solid-on-solid). The boundary conditions on the heights are still periodic in the longitudinal direction, but *fixed* in the transverse direction. More precisely, the cyclic strip $L_F \times N_P$ has precisely two exterior dual vertices, whose heights are fixed to 1 and $2j+1$ respectively. It is convenient to draw the lattice of heights as in Figures 3–4 (showing respectively a square and a triangular-lattice strip of width $L = 2$), i.e., with N exterior vertices above the upper rim, and N exterior vertices below the lower rim of the strip: all these exterior vertices close to a given rim are then meant to be identified.

For a given lattice of spins, the weights of the RSOS model are most easily defined by building up the height lattice face by face, using a transfer matrix. The transfer matrix adding one face at position i is denoted $H_i = xI_i + e_i$ (resp. $V_i = I_i + xe_i$) if it propagates a height $h_i \rightarrow h'_i$ standing on a direct (resp. a dual) vertex, where $I_i = \delta(h_i, h'_i)$ is the identity operator, and e_i is the Temperley-Lieb generator in the RSOS representation [24]:

$$e_i = \delta(h_{i-1}, h_{i+1}) \frac{[\sin(\pi h_j/p) \sin(\pi h'_j/p)]^{1/2}}{\sin(\pi h_{j-1}/p)}. \quad (2.7)$$

Note that all the amplitudes $S_j(p)$ entering in Eq. (2.5) are strictly positive. Therefore, for a generic value of the temperature x , all the eigenvalues associated with $\chi_{1,2j+1}(p, L; x)$ for $0 < 2j+1 < p$ contribute to the partition function.⁷ This is the very reason why

⁷For exceptional values of x there may still be cancellations between eigenvalues with opposite sign. However, the pair of eigenvalues that cancel must now necessarily belong to the *same* sector $\chi_{1,2j+1}$.

we use the RSOS representation. Recall that there are analogous results in conformal field theory [37]. In fact, for x equal to $x_{\text{FM}}(Q)$ and in the continuum limit, $K_{1,2j+1}$ corresponds to the generating function of a generic representation of the conformal symmetry with Kac-table indices $r = 1$ and $s = 2j + 1$, whereas $\chi_{1,2j+1}$ corresponds to the generating function (character) of a minimal model. Thus, Eq. (2.6) corresponds to the Rocha-Caridi equation [38], which consists of taking into account the null states. One could say that the FK representation does not identify all the states differing by null states, whereas the RSOS representation does. Therefore, the dimension of the transfer matrix is smaller in the RSOS representation than in the FK representation.

The computation of the partition functions $\chi_{1,2j+1}(p, L; x)$ can be done in terms of transfer matrices $\mathbb{T}_{1,2j+1}$, denoted in the following simply by \mathbb{T}_{2j+1} . In particular, for a strip of size $L \times N$, we have that

$$\chi_{1,2j+1}(p, L; x) = \text{tr } \mathbb{T}_{2j+1}(p, L; x)^N \quad (2.8)$$

Note that this is a completely standard untwisted trace. The transfer matrix $\mathbb{T}_{2j+1}(L; x)$ acts on the space spanned by the vectors $|h_0, h_1, \dots, h_{2L}\rangle$, where the boundary heights $h_0 = 1$ and $h_{2L} = 2j + 1$ are fixed. The dimensionality of this space is discussed in Appendix A. For any fixed h_0 and h_{2L} , this dimensionality grows asymptotically like $\sim Q^L$.

Remarks. 1) Our numerical work is based on an automatized construction of \mathbb{T}_{2j+1} . To validate our computer algorithm, we have verified that Eq. (2.5) is indeed satisfied. More precisely, given $Q = B_p$, and for fixed L and N , we have verified that

$$Z_{L_{\text{F}} \times N_{\text{P}}}(Q; v) = Q^{LN/2} \sum_{0 < 2j+1 < p} S_j(p) \chi_{1,2j+1}(p, L; x) = Z_{N_{\text{P}} \times L_{\text{F}}}(Q; v) \quad (2.9)$$

where $Z_{N_{\text{P}} \times L_{\text{F}}}(Q; v)$ is the partition function of the Q -state Potts model on a strip of size $N_{\text{P}} \times L_{\text{F}}$ with cylindrical boundary conditions, as computed in Refs. [39, 40]. We have made this check for $p = 4, 5, 6$ and for several values of L and N .

2) For $p = 3$ the RSOS model trivializes. Only the $\chi_{1,1}$ sector exists, and \mathbb{T}_1 is one-dimensional for all L . Eq. (2.5) gives simply

$$Z_{L_{\text{F}} \times N_{\text{P}}}(Q = 1; x) = (1 + x)^E, \quad (2.10)$$

where E is the number of lattice edges (faces on the height lattice). It is not possible to treat the bond percolation problem in the RSOS context, since this necessitates taking $Q \rightarrow 1$ as a *limit*, and not to sit directly at $Q = 1$. Hence, the right representation for studying bond percolation is the FK representation.

3 Square-lattice Potts model with free cyclic boundary conditions

3.1 Ising model ($p = 4$)

The partition function for a strip of size $L_F \times N_P$ is given in the RSOS representation as

$$Z_{L_F \times N_P}(Q = 2; x) = 2^{NL/2} [\chi_{1,1}(x) + \chi_{1,3}(x)] \quad (3.1)$$

where $\chi_{1,2j+1}(x) = \text{tr } \mathsf{T}_{2j+1}(p = 4, L; x)^N$. The dimensionality of the transfer matrices can be obtained from the general formulae derived in Appendix A:

$$\dim \mathsf{T}_k(p = 4, L) = 2^{L-1}, \quad k = 1, 3 \quad (3.2)$$

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 5(a)–(c). In Figure 5(d), we show simultaneously all three curves for comparison. In addition, we have computed the partition-function zeros for finite strips of dimensions $L_F \times (\rho L)_P$ for aspect ratios $\rho = 10, 20, 30$. These zeros are also displayed in Figure 5(a)–(c).⁸ For $5 \leq L \leq 8$, we have only computed selected features of the corresponding limiting curves (e.g., the phase diagram for real x).

3.1.1 $L = 2$

This strip is displayed in Figure 3. Let us denote the basis in the height space as $|h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\rangle$, where the order is given as in Figure 3.

The transfer matrix T_1 is two-dimensional: in the basis $\{|1, 2, 1, 2, 1\rangle, |1, 2, 3, 2, 1\rangle\}$, it takes the form

$$\mathsf{T}_1(p = 4, L = 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{2,0} & Y_{2,1} \\ Y_{2,3} & Y_{2,2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

where we have used the shorthand notation

$$Y_{L,k} = x^k \left(x + \sqrt{2} \right)^{2L-1-k}, \quad k = 0, \dots, 2L-1 \quad (3.4)$$

The transfer matrix T_3 is also two-dimensional: in the basis $\{|1, 2, 1, 2, 3\rangle, |1, 2, 3, 2, 3\rangle\}$, it takes the form

$$\mathsf{T}_3(p = 4, L = 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{2,1} & Y_{2,2} \\ Y_{2,2} & Y_{2,1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

For real x , there is a single phase-transition point at

$$x_c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.7071067812 \quad (3.6)$$

⁸After the completion of this work, we learned that Chang and Shrock had obtained the limiting curves for $L = 2$ [41, Figure 20] and $L = 3$ [42, Figure 7]. The eigenvalues and amplitudes for $L = 2$ had been previously published by Shrock [43, Section 6.13].

This point is actually a multiple point.⁹ There is an additional pair of complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/4} = -1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$. We also find an isolated limiting point at $x = -\sqrt{2}$ due to the vanishing of all the eigenvalues (see Ref. [31] for an explanation of this issue in terms of the Beraha–Kahane–Weiss theorem).

The dominant sector on the real x -axis is always $\chi_{1,1}$, except at $x = -\sqrt{2}$ and $x = -1/\sqrt{2}$; at these points the dominant eigenvalues coming from each sector $\chi_{1,k}$ become equimodular. On the regions with null intersection with the real x -axis, the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$.

3.1.2 $L \geq 3$

For $3 \leq L \leq 8$, we find two phase-transition points on the real x -axis:

$$x_{c,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.7071067812 \quad (3.7a)$$

$$x_{c,2} = -\sqrt{2} \approx -1.4142135624 \quad (3.7b)$$

Both points are actually multiple points (except $x_{c,2}$ for $L = 3$). There is an additional pair of complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/4}$.

For $x > x_{c,1}$, the dominant eigenvalue always belongs to the sector $\chi_{1,1}$. For $x < x_{c,1}$, this property is true only for even $L = 4, 6, 8$; for odd $L = 3, 5, 7$, the dominant eigenvalue for $x < x_{c,1}$ belongs to the $\chi_{1,3}$ sector.

3.2 $Q = B_5$ model ($p = 5$)

The partition function for a strip of size $L_F \times N_P$ is given in the RSOS representation as

$$Z_{L_F \times N_P}(Q = B_5; x) = B_5^{NL/2} \left[\chi_{1,1}(x) + \sqrt{B_5} \chi_{1,3}(x) \right] \quad (3.8)$$

where $\chi_{1,2j+1}(x) = \text{tr } T_{2j+1}(p = 5, L; x)^N$.

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 6(a)–(c). In Figure 6(d), we show all three curves for comparison. For $L = 5, 6$, we have only computed selected features of the corresponding limiting curves.

3.2.1 $L = 2$

The transfer matrix T_1 is two-dimensional: in the basis $\{|1, 2, 1, 2, 1\rangle, |1, 2, 3, 2, 1\rangle\}$, it takes the form

$$T_1(p = 5, L = 2) = \begin{pmatrix} \sqrt{B_5^*} X_3 & B_5^{1/4} \sqrt{B_5^*} x X_3^2 \\ B_5^{*1/4} x^3 & x^2(1+x) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

⁹Throughout this paper a point on \mathcal{B}_L of order ≥ 4 is referred to as a multiple point.

where we have used the shorthand notation

$$X_3 = x + \sqrt{B_5}, \quad X_3^* = x + \sqrt{B_5^*} \quad (3.10)$$

in terms of B_5 and B_5^* defined as

$$B_5 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad B_5^* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (3.11)$$

The transfer matrix T_3 is three-dimensional. In the basis $\{|1, 2, 1, 2, 3\rangle, |1, 2, 3, 4, 3\rangle, |1, 2, 3, 2, 3\rangle\}$, it takes the form

$$T_3(p=5, L=2) = \begin{pmatrix} \sqrt{B_5^*} x X_3^2 & 0 & B_5^{*1/4} x^2 X_3 \\ \sqrt{B_5^*} x^2 & x X_3^* & B_5^{*1/4} x(1+x) \\ B_5^{*1/4} x^2(1+x) & B_5^{*1/4} x & x(1+x)^2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

For real x , there is a single phase-transition point at

$$x_c = -\frac{\sqrt{B_5}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \approx -0.8090169944 \quad (3.13)$$

We have also found that the limiting curve contains a horizontal line between $x = x_{BK} = -1$ and $x \approx -1.3843760945$. The latter point is a T point, and the former one, a multiple point. There is an additional pair of complex conjugate multiple points at

$$x = -e^{\pm i\pi/5} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{2}(5B_5^*)^{1/4} \approx -0.8090169944 \pm 0.5877852523 i \quad (3.14)$$

We have found two additional pairs of complex conjugate T points at $x \approx -1.5613823329 \pm 0.3695426938 i$, and $x \approx -0.9270509831 \pm 0.3749352940 i$. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-\infty, -1.3843760945) \cup (-0.8090169944, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-1.3843760945, -0.8090169944)$

3.2.2 $L \geq 3$

For $L = 3$ there are two real phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -2.1862990086 \quad (3.15a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.9176152641 \quad (3.15b)$$

The limiting curve contains a horizontal line between two real T points $x \approx -1.2066212246$ and $x \approx -0.9713270390$. There are nine additional pairs of complex conjugate T points. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-2.1862990086, -1.2066212246) \cup (-0.9176152641, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, -2.1862990086) \cup (-1.2066212246, -0.9176152641)$

For $L = 4$, the real transition points are located at

$$x_{c,1} \approx -1.3829734471 \quad (3.16a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.9475070976 \quad (3.16b)$$

We have found that the curve \mathcal{B}_4 contains a horizontal line between two real T points: $x \approx -1.1982787848$ and $x \approx -0.9776507663$. Two points belonging to such line are actually multiple points: $x \approx -0.9923357481$ and $x \approx -0.9972135728$. We have found 34 pairs of complex conjugate T points. The phase diagram is rather involved, and we find several tiny closed regions. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (-1.1982787848, -0.9972135728) \cup (x_{c,2}, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (x_{c,1}, -1.1982787848) \cup (-0.9972135728, x_{c,2})$

For $L = 5$, there are four real phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -2.4492425881 \quad (3.17a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.2097913730 \quad (3.17b)$$

$$x_{c,3} \approx -1.1717714277 \quad (3.17c)$$

$$x_{c,4} \approx -0.9616402644 \quad (3.17d)$$

Again, \mathcal{B}_5 contains a horizontal line between $x \approx -1.1323655119$ and $x \approx -0.9770339631$. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (x_{c,1}, -0.9770339631) \cup (x_{c,4}, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (-0.9770339631, x_{c,4})$

Finally, for $L = 6$, there are five real phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -1.2750054535 \quad (3.18a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.2712112920 \quad (3.18b)$$

$$x_{c,3} \approx -1.1323753929 \quad (3.18c)$$

$$x_{c,4} \approx -1.1052066740 \quad (3.18d)$$

$$x_{c,5} \approx -0.9700021428 \quad (3.18e)$$

The limiting curve contains a horizontal line between two real T points: $x \approx -1.0877465961$ and $x \approx -0.9792223546$. This line contains the multiple point $x \approx -1.0781213888$. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (x_{c,2}, -1.0877465961) \cup (-1.0781213888, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (x_{c,1}, x_{c,2}) \cup (-1.0877465961, -1.0781213888)$

In all cases $2 \leq L \leq 6$, there is a pair of complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/5} \approx -0.8090169944 \pm 0.5877852523 i$.

3.3 Three-state Potts model ($p = 6$)

The partition function for a strip of size $L_F \times N_P$ is given in the RSOS representation as

$$Z_{L_F \times N_P}(Q = 3; x) = 3^{NL/2} [\chi_{1,1}(x) + 2\chi_{1,3}(x) + \chi_{1,5}(x)] \quad (3.19)$$

where $\chi_{1,2j+1}(x) = \text{tr } T_{2j+1}(p = 6, L; x)^N$.

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 7(a)–(c).¹⁰

In Figure 7(d), we show all three curves for comparison. For $L = 5, 6, 7$ we have only computed selected features of the corresponding limiting curves.

3.3.1 $L = 2$

The transfer matrix T_5 is one-dimensional, as there is a single basis vector $\{|1, 2, 3, 4, 5\rangle\}$. The matrix is given by

$$T_5(p = 6, L = 2) = x^2 \quad (3.20)$$

The transfer matrix T_1 is two-dimensional: in the basis $\{|1, 2, 1, 2, 1\rangle, |1, 2, 3, 2, 1\rangle\}$, it takes the form

$$T_1(p = 6, L = 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} X_1^3 & \sqrt{2} x X_1^2 \\ \sqrt{2} x^3 & x^2 X_2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

where we have used the shorthand notation

$$X_1 = x + \sqrt{3}, \quad X_2 = 2x + \sqrt{3} \quad (3.22)$$

The transfer matrix T_3 is three-dimensional. In the basis $\{|1, 2, 1, 2, 3\rangle, |1, 2, 3, 4, 3\rangle, |1, 2, 3, 2, 3\rangle\}$, it takes the form

$$T_3(p = 6, L = 2) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2xX_1^2 & 0 & 2\sqrt{2}x^2X_1 \\ \sqrt{6}x^2 & \sqrt{3}xX_2 & \sqrt{3}xX_2 \\ \sqrt{2}x^2X_2 & 3x & xX_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

¹⁰After the completion of this work, we learned that the limiting curves for the smallest widths had been already obtained by Chang and Shrock: namely, $L = 2$ [42, Figure 22], and $L = 3$ [42, Figure 8]. Please note that in the latter case, they used the variable $u = 1/(v + 1) = 1/(x\sqrt{Q} + 1)$, instead of our variable x .

For real x , there are two phase-transition points

$$x_{c,1} = -\sqrt{3} = x_- \approx -1.7320508076 \quad (3.24a)$$

$$x_{c,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.8660254038 \quad (3.24b)$$

There is one pair of complex conjugate T points at $x \approx -1.6522167507 \pm 0.5104474197 i$. There are three multiple points at $x = -\sqrt{3}/2$, and $x = -\sqrt{3}/2 \pm i/2 = -e^{\pm i\pi/6}$. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}/2, \infty)$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$

On the regions with null intersection with the real x -axis, the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$.

3.3.2 $L \geq 3$

For $L = 3$, there are three real phase-transition points

$$x_{c,1} \approx -1.9904900679 \quad (3.25a)$$

$$x_{c,2} = -\sqrt{3} = x_- \approx -1.7320508076 \quad (3.25b)$$

$$x_{c,3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.8660254038 \quad (3.25c)$$

The limiting curve contains a small horizontal segment running from $x \approx -1.0539518478$ to $x = x_{BK} = -1$. On this line, the two dominant equimodular eigenvalues come from the sector $\chi_{1,5}$.

We have found 15 T points (one real point and seven pairs of complex conjugate T points). The real point is $x = -1$. The phase structure is vastly more complicated than that for $L = 2$. In particular, it contains three non-connected pieces, and four bulb-like regions. On the real x -axis, the dominant eigenvalue comes from

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (x_{c,1}, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}/2, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (-\sqrt{3}, -1.0539518478)$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (-1.0539518478, -\sqrt{3}/2)$

For $L = 4$, there are four phase-transition points

$$x_{c,1} = -\sqrt{3} = x_- \approx -1.7320508076 \quad (3.26a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.3678583305 \quad (3.26b)$$

$$x_{c,3} \approx -1.2237725061 \quad (3.26c)$$

$$x_{c,4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.8660254038 \quad (3.26d)$$

This is the strip with smallest width for which a (complex conjugate) pair of endpoints appears: $x \approx -0.9951436066 \pm 0.00444309186i$. These points are very close to the transition point $x_{\text{BK}} = -1$. We have found 36 pairs of conjugate T points. We have also found three multiple points at $x = -\sqrt{3}$, and $x = -\sqrt{3}/2 \pm i/2$. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-\infty, x_{c,3}) \cup (-\sqrt{3}/2, \infty)$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (x_{c,3}, -\sqrt{3}/2)$

For $L = 5$, there are six real phase-transition points

$$x_{c,1} \approx -2.3018586529 \quad (3.27a)$$

$$x_{c,2} = -\sqrt{3} = x_- \approx -1.7320508076 \quad (3.27b)$$

$$x_{c,3} \approx -1.4373407728 \quad (3.27c)$$

$$x_{c,4} \approx -1.3412360954 \quad (3.27d)$$

$$x_{c,5} \approx -1.2613579653 \quad (3.27e)$$

$$x_{c,6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.8660254038 \quad (3.27f)$$

We have also found a horizontal line running between the T points $x \approx -1.0226306002$ and $x \approx -0.9984031794$. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (x_{c,1}, x_{c,3}) \cup (-\sqrt{3}/2, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (x_{c,3}, -1.0226306002)$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (-1.0226306002, -\sqrt{3}/2)$

For $L = 6$, there are also six phase-transition points on the real axis

$$x_{c,1} = -\sqrt{3} = x_- \approx -1.7320508076 \quad (3.28a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.2852299467 \quad (3.28b)$$

$$x_{c,3} \approx -1.2238569234 \quad (3.28c)$$

$$x_{c,4} \approx -1.1271443188 \quad (3.28d)$$

$$x_{c,5} \approx -1.0085262838 \quad (3.28e)$$

$$x_{c,6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.8660254038 \quad (3.28f)$$

The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-\infty, x_{c,2}) \cup (x_{c,3}, x_{c,5}) \cup (-\sqrt{3}/2, \infty)$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (x_{c,2}, x_{c,3}) \cup (x_{c,5}, -\sqrt{3}/2)$

In all cases $2 \leq L \leq 6$, we have found three multiple points at $x = -\sqrt{3}$, and $x = -\sqrt{3}/2 \pm i/2 = -e^{\pm i\pi/6}$.

3.4 Four-state Potts model ($p = \infty$)

It follows from the RSOS constraint and the fact that $h_0 = 1$ is fixed, that the maximal height participating in a state is $h_{\max} = \max(2L, p - 1)$. In particular, for any fixed L the number of states stays finite when one takes the limit $p \rightarrow \infty$. Meanwhile, the Boltzmann weight entering in Eq. (2.7) has the well-defined limit $(h_j h'_j)^{1/2} / h_{j-1}$, and the amplitudes (2.2) tend to $S_j(\infty) = 2j + 1$. We shall refer to this limit as the $p = \infty$ (or $Q = 4$) model.

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 8(a)–(c). In Figure 8(d), we show all three curves for comparison.

3.4.1 $L = 2$

The transfer matrices are

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (x+2)^3 & \sqrt{3}x(x+2)^2 \\ \sqrt{3}x^3 & x^2(2+3x) \end{pmatrix} \quad (3.29a)$$

$$T_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3x(x+2)^2 & 0 & 3\sqrt{3}x^2(x+2) \\ 2\sqrt{6}x^2 & 2x(3x+4) & 2\sqrt{2}x(3x+2) \\ \sqrt{3}x^2(3x+2) & 4\sqrt{2}x & x(3x+2)^2 \end{pmatrix} \quad (3.29b)$$

$$T_5 = x^2 \quad (3.29c)$$

For real x , we find a multiple point at $x = -1$, where all eigenvalues become equimodular with $|\lambda_i| = 1$. The dominant sector on the real x -axis is always $\chi_{1,1}$.

3.4.2 $L \geq 3$

For $L = 3$ there are two real phase-transition points: $x = -1$ (which is a multiple point), and $x_c \approx -1.6424647621$. We have found ten pairs of complex conjugate T points and a pair of complex conjugate endpoints. The dominant sectors on the real x -axis are $\chi_{1,3}$ for $x < -1$, and $\chi_{1,1}$ for $x > -1$. The sector $\chi_{1,5}$ is only dominant in two complex conjugate regions off the real x -axis, and the sector $\chi_{1,7}$ is never dominant.

For $L = 4$ we only find a single real phase-transition point at $x = -1$. We have also found 32 pairs of complex conjugate T points and two pairs of complex conjugate endpoints. The dominant sector on the real x -axis is always $\chi_{1,1}$. There is also two complex conjugate regions where the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$, and the sectors $\chi_{1,7}$ and $\chi_{1,9}$ are never dominant in the complex x -plane.

For $L = 5$ we find four real phase-transition points at

$$x_{c,1} = -1.9465787472 \quad (3.30a)$$

$$x_{c,2} = -1.5202407889 \quad (3.30b)$$

$$x_{c,3} = -1.3257163278 \quad (3.30c)$$

$$x_{c,4} = -1 \quad (3.30d)$$

The dominant sectors are $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (x_{c,2}, -1)$; and $\chi_{1,1}$ in the region $x \in (x_{c,1}, x_{c,2}) \cup (-1, \infty)$.

For $L = 4$ we only find a single real phase-transition point at $x = -1$. The dominant sector on the real x -axis is always $\chi_{1,1}$.

In all cases $3 \leq L \leq 5$, the point $x = -1$ is a multiple point where all the eigenvalues are equimodular with $|\lambda_i| = 1$.

4 Common features of the square-lattice limiting curves with free cyclic boundary conditions

From the numerical data discussed in Sections 3.1–3.3, we can make the following conjecture that states that certain points in the complex x -plane belong to the limiting curve \mathcal{B}_L :

Conjecture 4.1 *For the square-lattice Q -state Potts model with $Q = B_p$ and widths $L \geq 2$:*

1. *The points $x = -e^{\pm i\pi/p}$ belong to the limiting curve. At these points, all the eigenvalues are equimodular with $|\lambda_i| = 1$.¹¹ Thus, they are in general multiple points.*
2. *For even p , the point $x = -\sqrt{Q}/2$ always belongs to the limiting curve \mathcal{B}_L .¹² Furthermore, if $p = 4, 6$, then the point $x = -\sqrt{Q}$ also belongs to \mathcal{B}_L .*

The phase structure for the models considered above show certain regularities on the real x -axis (which contains the physical regime of the model). In particular, we conclude

Conjecture 4.2 *For the square-lattice Q -state Potts model with $Q = B_p$ and widths $L \geq 2$:*

1. *The relevant eigenvalue on the physical line $v \in [-1, \infty)$ comes from the sector $\chi_{1,1}$.*
2. *For even L , the leading eigenvalue for real x comes always from the sector $\chi_{1,1}$, except perhaps in an interval contained in $[-\sqrt{Q}, -\sqrt{Q}/2]$.*

¹¹This property has been explicitly checked for all the widths reported in this paper.

¹²This property has been verified for $p = 8, 10$ and $2 \leq L \leq 6$.

3. For odd L , the leading eigenvalue for real x comes from the sector $\chi_{1,3}$ for all $x < x_0 \leq -\sqrt{Q}$, and from the sector $\chi_{1,1}$ for all $x \geq -\sqrt{Q}/2$.

In the limiting case $p = \infty$ the RSOS construction simplifies. Namely, the quantum group $U_q(SU(2))$ reduces to the classical $U(SU(2))$ (i.e., $q \rightarrow 1$), and its representations no longer couple different $K_{1,2j+1}$, cf. Eq. (2.4). Accordingly we have simply $K_{1,2j+1} = \chi_{1,2j+1}$. When increasing p along the line $x_{BK}(Q)$, the sector $K_{1,2j+1}$ which dominates for *irrational* p will have higher and higher spin j [7]; this is even true throughout the Berker-Kadanoff phase.¹³ One would therefore expect that the $p = \infty$ RSOS model will have a dominant sector $\chi_{1,2j+1}$ with j becoming larger and larger as one approaches $x_{BK}(Q = 4) = -1$.

This argument should however be handled with care. Indeed, for $p \rightarrow \infty$ the BK phase contracts to a point, $(Q, v) = (4, -2)$, and this point turns out to be a very singular limit of the Potts model. In particular, one has $x_{BK} = x_{\pm}$ for $Q = 4$, and very different results indeed are obtained depending on whether one approaches $(Q, v) = (4, -2)$ along the AF or the BK curves (1.4). This is visible, for instance, on the level of the central charge, with $c \rightarrow 2$ in the former and $c \rightarrow -\infty$ in the latter case. To wit, taking $x \rightarrow -1$ after having fixed $p = \infty$ in the RSOS model is yet another limiting prescription, which may lead to different results.

The phase diagrams for $Q = 4$ ($p \rightarrow \infty$) do agree with the above general conjectures 4.1-4.2. In particular, when $p \rightarrow \infty$, the multiple points $-e^{\pm i\pi/p} \rightarrow -1 = x_{BK}$ (Conjecture 4.1.1) and this coincides with the point $-\sqrt{Q}/2$ (Conjecture 4.1.2). On the other hand, the sector $\chi_{1,1}$ is the dominant one on the physical line $v \in [-1, \infty)$ (Conjecture 4.2.1), and we observe a parity effect on the unphysical regime $v \in (-\infty, -1)$. For even L , the only dominant sector is $\chi_{1,1}$ in agreement with Conjecture 4.2.2 (although there is no interval inside $[-2, -1]$ where $\chi_{1,3}$ becomes dominant). For odd L , Conjecture 4.2.3 also holds with $x_0 = -\sqrt{Q} = -2$ (at least for $L = 3, 5$). For $L = 2, 3, 4$, we find that in addition to the sectors $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,3}$, only the sector $\chi_{1,5}$ becomes relevant in some regions in the complex x -plane.

4.1 Asymptotic behavior for $|x| \rightarrow \infty$

Figures 5–8 show a rather uncommon scenario: the limiting curves contain outward branches. As a matter of fact, these branches extend to infinity (i.e., they are unbounded¹⁴), in sharp contrast with the *bounded* limiting curves obtained using *free* longitudinal boundary conditions [39, 40]. It is important to remark that this phenomenon also holds in the limit $p \rightarrow \infty$, as shown in Figure 8.

As $|x| \rightarrow \infty$ these branches converge to rays with definite slopes. More precisely, our numerical data suggest the following conjecture:¹⁵

¹³See Ref. [34] for numerical evidence along the chromatic line $x = -1/\sqrt{Q}$ which intersects the BK phase up to $p = 12$ [15].

¹⁴An unbounded branch is one which does not have a finite endpoint.

¹⁵Chang and Shrock [42] observed for $L = 3$ that if we plot the limiting curve in the variable

Conjecture 4.3 *For any value of p , the limiting curve \mathcal{B}_L for a square-lattice strip has exactly $2L$ outward branches. As $|x| \rightarrow \infty$, these branches are asymptotically rays with*

$$\arg x \equiv \theta_n(L) = \pi \left(\frac{n}{L} - \frac{1}{2L} \right), \quad n = 1, 2, \dots, 2L \quad (4.1)$$

By inspection of Figures 5–8, it is also clear that the only two sectors that are relevant in this regime are $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,3}$. In particular, the dominant eigenvalue belongs to the $\chi_{1,1}$ sector for large positive real x , and each time we cross one of these outward branches, the dominant eigenvalue switches the sector it comes from. In particular, we conjecture that

Conjecture 4.4 *The dominant eigenvalue for a square-lattice strip of width L in the large $|x|$ regime comes from the sector $\chi_{1,1}$ in the asymptotic regions*

$$\arg x \in (\theta_{2n-1}(L), \theta_{2n}(L)) , \quad n = 1, 2, \dots, L \quad (4.2)$$

In the other asymptotic regions the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$.

In particular, this means that for large positive x the dominant sector is always $\chi_{1,1}$. However, for large negative x the dominant eigenvalue comes from $\chi_{1,1}$ if L is even, and from $\chi_{1,3}$ if L is odd. Thus, this conjecture is compatible with Conjecture 4.2.

An empirical explanation of this fact comes from the computation of the asymptotic expansion for large $|x|$ of the leading eigenvalues in each sector. It turns out that there is a unique leading eigenvalue in each sector $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,3}$ when $|x| \rightarrow \infty$. As there is a unique eigenvalue in this regime, we can obtain it by the power method [44]. Our numerical results suggest the following conjecture

Conjecture 4.5 *Let $\lambda_{*,1}(L)$ (resp. $\lambda_{*,3}(L)$) be the leading eigenvalue of the sector $\chi_{1,1}$ (resp. $\chi_{1,3}$) in the regime $|x| \rightarrow \infty$. Then*

$$\lambda_{*,1}(L) = Q^{(L-1)/2} x^{2L-1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(L)}{Q^{k/2}} x^{-k} \right] \quad (4.3a)$$

$$\lambda_{*,1}(L) - \lambda_{*,3}(L) = \sqrt{Q} x^{L-1} + 3(L-1)x^{L-2} + O(x^{L-3}) \quad (4.3b)$$

Furthermore, we have that

$$a_1(L) = 2L - 1, \quad L \geq 2 \quad (4.4a)$$

$$a_2(L) = 2L^2 - 3L + 1, \quad L \geq 3 \quad (4.4b)$$

$u = 1/(x\sqrt{Q} + 1)$, then the point $u = 0$ is approached at specific angles $\arg u$ consistent with our Conjecture 4.3.

The first coefficients $a_k(L)$ are displayed in Table 1; the patterns displayed in (4.4) are easily verified. The coefficients $a_k(L)$ also depend on p for $k \geq 3$.

Indeed, the above conjecture explains easily the observed pattern for the leading sector when x is real. But it also explains the observed pattern for all the outward branches. These branches are defined by the equimodularity of the two leading eigenvalues

$$|\lambda_{*,1}| = |\lambda_{*,3}| = \left| \lambda_{*,1} - \sqrt{Q}x^{L-1} + O(x^{L-2}) \right| \quad (4.5)$$

This implies that

$$\operatorname{Re} [\lambda_{*,1} \bar{x}^{L-1}] = 0 \quad (4.6)$$

where \bar{x} is the complex conjugate of x . Then, if $x = |x|e^{i\theta}$, then the above equation reduces to

$$\cos(\theta L) = 0 \Rightarrow \theta_n = \frac{\pi}{2L}(2n-1), \quad n = 1, 2, \dots, 2L \quad (4.7)$$

in agreement with Eq. (4.1).

Remark. The existence of unbounded outward branches for the limiting curve of the Potts model with cyclic boundary conditions is already present for the simplest case $L = 1$. Here, the strip is just the cyclic graph of n vertices C_n . Its partition function is given exactly by

$$Z_{C_n}(Q, v) = (Q + v)^n + (Q - 1)v^n \quad (4.8)$$

Then, we have two eigenvalues $\lambda_1 = Q + v = Q + x\sqrt{Q}$ and $\lambda_2 = v = x\sqrt{Q}$, which grow like $\sim x^{2L-1} = x$ and whose difference is $Q = O(x^{L-1})$, in agreement with Conjecture 4.5. Furthermore, the limiting curve is the line $\operatorname{Re} x = -\sqrt{Q}/2$, which, as $|x| \rightarrow \infty$, has slopes given by $\pm\pi/2$, in agreement with Conjecture 4.3.

4.2 Other asymptotic behaviors

For the Ising case ($p = 4$) the points $x = -\sqrt{2}$ and $x = -1/\sqrt{2}$ are in general multiple points and we observe a pattern similar to the one observed for $|x| \rightarrow \infty$.

For $x = -1/\sqrt{2}$, we find that, if we write $x = -1/\sqrt{2} + \epsilon$ with $|\epsilon| \ll 1$, within each sector there is only one leading eigenvalue $\lambda_{*,j}(L) \sim O(1)$. More precisely, for $L \geq 3$,

$$\lambda_{*,1}(L) = 2^{-L/2} + O(\epsilon^3) \quad (4.9a)$$

$$\lambda_{*,1}(L) - \lambda_{*,3}(L) = 2\epsilon^L + O(\epsilon^{L+1}) \quad (4.9b)$$

Again, the equimodularity condition when $|\epsilon| \rightarrow 0$ implies that $\operatorname{Re}(\epsilon^L) = 0$, whence $\arg \epsilon = \theta_n$ with θ_n given by Eq. (4.7).

The case $x = -\sqrt{2}$ is more involved. If we write $x = -\sqrt{2} + \epsilon$ with $|\epsilon| \ll 1$, we find that in the sector $\chi_{1,1}$ there are two eigenvalues of order $O(\epsilon)$, and the rest are of

order at least $O(\epsilon^2)$. The same conclusion is obtained from the sector $\chi_{1,3}$. If we call $\lambda_{\star,j}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) the dominant eigenvalues coming from sector $\chi_{1,j}$, then we find for $L \geq 3$ that

$$\lambda_{\star,1}^{(1)}(L) = 2^{(L-1)/2}\epsilon + O(\epsilon^2) \approx -\lambda_{\star,1}^{(2)}(L) \quad (4.10a)$$

$$\lambda_{\star,1}^{(1)}(L) + \lambda_{\star,1}^{(2)}(L) = \begin{cases} \sqrt{2}\epsilon^{L-1} & L \text{ even} \\ 2(L-1)\epsilon^L & L \text{ odd} \end{cases} \quad (4.10b)$$

$$\lambda_{\star,3}^{(1)}(L) = -2^{(L-1)/2}\epsilon + O(\epsilon^2) \approx -\lambda_{\star,3}^{(2)}(L) \quad (4.10c)$$

$$\lambda_{\star,3}^{(1)}(L) + \lambda_{\star,3}^{(2)}(L) = \begin{cases} -2(L-1)\epsilon^L & L \text{ even} \\ -\sqrt{2}\epsilon^{L-1} & L \text{ odd} \end{cases} \quad (4.10d)$$

$$\lambda_{\star,1}^{(1)}(L) + \lambda_{\star,3}^{(1)}(L) = \frac{(-1)^L}{\sqrt{2}}\epsilon^{L-1} + O(\epsilon^L) \quad (4.10e)$$

The equimodularity condition implies that

$$\text{Re} [\epsilon \bar{\epsilon}^{L-1}] = 0 \Rightarrow \cos(\theta(L-2)) = 0 \quad (4.11)$$

Thus, the same asymptotic behavior is obtained as for $x = -1/\sqrt{2}$, except that $L \rightarrow L-2$:

$$\theta_n = \frac{\pi}{2(L-2)}(2n-1), \quad n = 1, \dots, 2(L-2) \quad (4.12)$$

5 Triangular-lattice Potts model with free cyclic boundary conditions

5.1 Ising model ($p = 4$)

For this model we know [16–18] the exact transition temperature for the antiferromagnetic model $v_{c,\text{AF}} = -1 = v_{c,\text{BK}}$. The partition function is given by a formula similar to that of the square lattice, and the dimensionality of $\mathbb{T}_j(2, L)$ is the same as for the square lattice. In what follows we give the different matrices in the same bases as for the square lattice.

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 9(a)–(c).¹⁶ In Figure 9(d), we show all three curves for comparison.

¹⁶After the completion of this work, we learned that Chang and Shrock had obtained the limiting curve for $L = 2$ [41, Figure 18].

5.1.1 $L = 2$

This strip is drawn in Figure 4. The transfer matrices are

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x^4 + 5\sqrt{2}x^3 + 12x^2 + 8\sqrt{2}x + 4 & x(2x^3 + 5\sqrt{2}x^2 + 8x + 2\sqrt{2}) \\ x^2(2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2) & x^2(2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2) \end{pmatrix} \quad (5.1a)$$

$$T_3 = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2x^3 + 5\sqrt{2}x^2 + 8x + 2\sqrt{2} & 2x^3 + 5\sqrt{2}x^2 + 8x + 2\sqrt{2} \\ x(2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2) & 8x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 6x + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.1b)$$

For real x , there is a single phase-transition point at

$$x_c = -1/\sqrt{2} \approx -0.7071067812 \quad (5.2)$$

We have found that the entire line

$$\operatorname{Re} x = -1/\sqrt{2} \quad (5.3)$$

belongs to the limiting curve. Furthermore, \mathcal{B}_2 is symmetric with respect to this line. Finally, there are two complex conjugate multiple points at $x = -1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2} = -e^{\pm i\pi/4}$.

The dominant sector on the real x -axis is $\chi_{1,1}$ for $x > -1/\sqrt{2}$, and $\chi_{1,3}$ for $x < -1/\sqrt{2}$. Note that $x_c = -1/\sqrt{2}$ gives the right bulk critical temperature for this model in the antiferromagnetic regime.

5.1.2 $L \geq 3$

For $L = 3, 4$ we have found that a) The line $\operatorname{Re} x = -1/\sqrt{2}$ belongs to the limiting curve; b) \mathcal{B}_L is symmetric under reflection with respect to that line; c) \mathcal{B}_L contains a pair of multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/4}$; and d) The dominant sector on the real x -axis is $\chi_{1,1}$ for $x > -1/\sqrt{2}$, and $\chi_{1,3}$ for $x < -1/\sqrt{2}$.

For $L = 3$, there is another pair of multiple points at $x \approx -1/\sqrt{2} \pm 0.7257238112i$; for $L = 4$ this pair is located at $x \approx -1/\sqrt{2} \pm 0.7647261156i$.

For $L = 5, 6, 7$, we have found that there is a single real phase-transition point at $x = -1/\sqrt{2}$, and that the dominant sector for $x > -1/\sqrt{2}$ (resp. $x < -1/\sqrt{2}$) is $\chi_{1,1}$ (resp. $\chi_{1,3}$).

5.2 $Q = B_5$ model ($p = 5$)

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 10(a)–(c). In Figure 10(d), we show all three curves for comparison.

5.2.1 $L = 2$

The transfer matrices are

$$T_1 = \begin{pmatrix} B_5 + x(2x + 4X_3 + x^2X_4^*) & xB_5^{1/4}(\sqrt{B_5} + 4x + x^2X_5^*) \\ x^2B_5^{1/4}(1 + 3\sqrt{B_4^*}x + x^2) & x^2(1 + 3x + 3\sqrt{B_5}x^2) \end{pmatrix} \quad (5.4a)$$

$$T_3 = x \begin{pmatrix} \sqrt{B_5} + 4x + x^2X_4^* & \sqrt{B_5^*}X_3 & B_5^{1/4}(1 + x\sqrt{5B_5} + x^2X_4^*) \\ \sqrt{B_5^*}x & X_3^* & (B_5^*)^{1/4}(1 + x) \\ (B_5^*)^{1/4}x(1 + 3x + \sqrt{B_5}x^2) & (B_5^*)^{1/4}(1 + x) & 1 + 3x + 3x^2 + \sqrt{B_5}x^3 \end{pmatrix} \quad (5.4b)$$

where we have defined the shorthand notations

$$X_4^* = 1 + 3\sqrt{B_5^*} + X_3^* \quad (5.5a)$$

$$X_5^* = 1 + 4\sqrt{B_5^*} + X_3^* \quad (5.5b)$$

For real x , there are two phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -0.9630466372 \quad (5.6a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.5908569607 \quad (5.6b)$$

In fact both points are T points and the whole interval $[x_{c,1}, x_{c,2}]$ belongs to the limiting curve \mathcal{B}_2 . Finally, there are two complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/5}$, as for the square-lattice case. The dominant sector on the real x -axis is $\chi_{1,1}$ for $x > x_{c,1}$, and $\chi_{1,3}$ for $x < x_{c,1}$.

5.2.2 $L \geq 3$

For $L = 3$, there are two real phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -1.0976251052 \quad (5.7a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.6376476917 \quad (5.7b)$$

We have found two pairs of complex conjugate endpoints at $x \approx -0.4297467004 \pm 0.6445268125i$, and $x \approx -0.3955590901 \pm 0.8536454650i$. There are nine pairs of complex conjugate T points, and two complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/5}$. The dominant sectors on the real x -axis are $\chi_{1,1}$ for $x > x_{c,1}$, and $\chi_{1,3}$ for $x < x_{c,1}$.

For $L = 4$, there are three real phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -1.0953543257 \quad (5.8a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.9708876996 \quad (5.8b)$$

$$x_{c,3} \approx -0.6102005246 \quad (5.8c)$$

The points $x_{c,2}$ and $x_{c,3}$ are T points, and they define a line belonging to the limiting curve. This line contains two multiple points at $x \approx -0.6319374252$, and $x \approx -0.7685805289$. We have found two additional pairs of complex conjugate endpoints at $x \approx -0.9270404586 \pm 0.3749352143i$, and $x = -e^{\pm i\pi/5}$. In addition, there are 22 pairs of complex conjugate T points. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (x_{c,1}, x_{c,2}) \cup (x_{c,3}, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (x_{c,2}, x_{c,3})$

For $L = 5$, we have found five real phase-transition points at

$$x_{c,1} \approx -1.0945337809 \quad (5.9a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.0615208835 \quad (5.9b)$$

$$x_{c,3} \approx -0.8629689747 \quad (5.9c)$$

$$x_{c,4} \approx -0.6393693994 \quad (5.9d)$$

$$x_{c,5} \approx -0.6362471039 \quad (5.9e)$$

The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (x_{c,1}, x_{c,2}) \cup (x_{c,3}, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, x_{c,1}) \cup (x_{c,2}, x_{c,3})$

For $L = 6$ the amount of memory needed for the computation of the phase diagram on the real x -axis is very large, so we have focused on trying to obtain the largest real phase-transition point. The result is $x_{c,1} \approx -0.6221939194 < -1/\sqrt{B_5}$. The sector $\chi_{1,1}$ dominates for all $x > x_{c,1}$; and for $x \lesssim x_{c,1}$, the sector $\chi_{1,3}$ dominates.

5.3 Three-state Potts model ($p = 6$)

For this model we also know that there is a first-order phase transition in the anti-ferromagnetic regime at [40, 45]

$$x_{c,AF}(q = 3) = -0.563512(14) \quad (5.10)$$

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 11(a)–(c).¹⁷ In Figure 11(d), we show all three curves for comparison.

¹⁷After the completion of this work, we learned that Chang and Shrock had obtained the limiting curve for $L = 2$ [41, Figure 19].

5.3.1 $L = 2$

The transfer matrices are

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^4 + 2\sqrt{3}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 & x\sqrt{2}(x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}) \\ x^2\sqrt{2}(x^2 + \sqrt{3}x + 1) & x^2(2x^2 + 2\sqrt{3}x + 1) \end{pmatrix} \quad (5.11a)$$

$$T_3 = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2(x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}) & \sqrt{2}X_1 & \sqrt{2}(2x^3 + 4\sqrt{3}x^2 + 7x + \sqrt{3}) \\ \sqrt{2}x & X_2 & X_2 \\ x\sqrt{2}(2x^2 + 2\sqrt{3}x + 1) & X_2 & 4x^3 + 4\sqrt{3}x^2 + 6x + \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (5.11b)$$

$$T_5 = x^2 \quad (5.11c)$$

For real x , there are two phase-transition points at

$$x_{c,1} = -2/\sqrt{3} \approx -1.1547005384 \quad (5.12a)$$

$$x_{c,2} = -1/\sqrt{3} \approx -0.5773502692 \quad (5.12b)$$

The latter one is actually a multiple point. There are also a pair of complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/6} = -\sqrt{3}/2 \pm i/2$. The dominant sectors on the real x -axis are: $\chi_{1,1}$ for $x > -1/\sqrt{3}$, $\chi_{1,3}$ for $x < -2/\sqrt{3}$, and $\chi_{1,5}$ for $x \in (-2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

5.3.2 $L \geq 3$

For $L = 3$, there are three real phase-transition points at

$$x_{c,1} = -2/\sqrt{3} \approx -1.1547005384 \quad (5.13a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.9712924104 \quad (5.13b)$$

$$x_{c,3} = -1/\sqrt{3} \approx -0.5773502692 \quad (5.13c)$$

The latter one is actually a multiple point. We have found two pairs of complex conjugate endpoints at $x \approx -0.3495004588 \pm 0.6911735024i$, and $x \approx -0.2862942369 \pm 0.8514701201i$. There are 16 pairs of complex conjugate T points. The dominant sectors on the real x -axis are $\chi_{1,1}$ for $x > -1/\sqrt{3}$, $\chi_{1,3}$ for $x < -2/\sqrt{3}$, and $\chi_{1,5}$ for $x \in (-2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

For $L = 4$, there are five real phase-transition points at

$$x_{c,1} = -2/\sqrt{3} \approx -1.1547005384 \quad (5.14a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.0219801955 \quad (5.14b)$$

$$x_{c,3} \approx -1.0041094453 \quad (5.14c)$$

$$x_{c,4} \approx -0.7664034488 \quad (5.14d)$$

$$x_{c,5} = -1/\sqrt{3} \approx -0.5773502692 \quad (5.14e)$$

The points $x_{c,3}$ and $x_{c,4}$ are T points, while $x_{c,5}$ is a multiple point. We have found a pair of complex conjugate endpoints at $x \approx -0.3857232364 \pm 0.6652216322i$. In addition,

there are 14 pairs of complex conjugate T points. The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x > x_{c,4}$
- $\chi_{1,3}$ for $x < -2/\sqrt{3}$ and $x \in (x_{c,2}, x_{c,3})$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (-2/\sqrt{3}, x_{c,2}) \cup (x_{c,3}, x_{c,4})$

For $L = 5$, there are five real phase-transition points at

$$x_{c,1} = -2/\sqrt{3} \approx -1.1547005384 \quad (5.15a)$$

$$x_{c,2} \approx -0.9326923327 \quad (5.15b)$$

$$x_{c,3} \approx -0.7350208125 \quad (5.15c)$$

$$x_{c,4} \approx -0.6186679617 \quad (5.15d)$$

$$x_{c,5} = -1/\sqrt{3} \approx -0.5773502692 \quad (5.15e)$$

The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (x_{c,2}, x_{c,3}) \cup (x_{c,4}, \infty)$
- $\chi_{1,3}$ for $x < x_{c,2}$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (x_{c,3}, x_{c,4})$

For $L = 6$, there are three real phase-transition points at

$$x_{c,1} = -2/\sqrt{3} \approx -1.1547005384 \quad (5.16a)$$

$$x_{c,2} \approx -1.0504774228 \quad (5.16b)$$

$$x_{c,3} = -1/\sqrt{3} \approx -0.5773502692 \quad (5.16c)$$

We have also found a small horizontal line belonging to the limiting curve \mathcal{B}_6 and bounded by the T points

$$x_{c,4} \approx -0.7688389273 \quad (5.17a)$$

$$x_{c,5} \approx -0.7646464215 \quad (5.17b)$$

The dominant sectors on the real x -axis are

- $\chi_{1,1}$ for $x \in (-1/\sqrt{3}, \infty) \cup (x_{c,4}, x_{c,5})$
- $\chi_{1,3}$ for $x \in (-\infty, -2/\sqrt{3}) \cup (x_{c,2}, x_{c,4})$
- $\chi_{1,5}$ for $x \in (-2/\sqrt{3}, x_{c,2}) \cup (x_{c,5}, -1/\sqrt{3})$

In all cases $3 \leq L \leq 6$, there is a pair of complex conjugate multiple points at $x = -e^{\pm i\pi/6}$.

5.4 Four-state Potts model ($p = \infty$)

We have computed the limiting curves \mathcal{B}_L for $L = 2, 3, 4$. These curves are displayed in Figure 12(a)–(c). In Figure 12(d), we show all three curves for comparison.

5.4.1 $L = 2$

The transfer matrices are

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_8(2x^3 + 3x^2 + 6x + 4) & \sqrt{3}xX_8X_7 \\ \sqrt{3}x^2X_7 & x^2X_6 \end{pmatrix} \quad (5.18a)$$

$$T_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3xX_8(2x^2 + 3x + 2) & 2\sqrt{6}xX_8 & \sqrt{3}xX_8X_6 \\ 2\sqrt{6}x^2 & 2x(4 + 3x) & 2\sqrt{2}x(2 + 3x) \\ \sqrt{3}x^2X_6 & 2\sqrt{2}x(3x + 2) & xX_9 \end{pmatrix} \quad (5.18b)$$

$$T_5 = x^2 \quad (5.18c)$$

where we have defined the short-hand notations

$$X_6 = 6x^2 + 9x + 2 \quad (5.19a)$$

$$X_7 = 2x^2 + 3x + 2 \quad (5.19b)$$

$$X_8 = x + 2 \quad (5.19c)$$

$$X_9 = 18x^3 + 27x^2 + 18x + 4 \quad (5.19d)$$

For real x , we find a multiple point at $x = -1$, and a T point at $x_c \approx -0.5808613334$. The limiting curve \mathcal{B}_2 contains the real interval $[-1, x_c]$. At $x = -1$, all eigenvalues become equimodular with $|\lambda_i| = 1$.

We have found two additional pairs of complex conjugate T points at $x \approx -0.9882427690 \pm 0.0896233991i$, and $x \approx -3/4 \pm 0.6614378278i$. The dominant sectors on the real x -axis are $\chi_{1,1}$ for $x > x_c$, and $\chi_{1,3}$ for $x < x_c$. We have found no region in the complex x -plane where the sector $\chi_{1,5}$ is dominant.

5.4.2 $L \geq 3$

For $L = 3$ there are two real phase-transition points: $x = -1$ (which is a multiple point), and $x_c \approx -0.8953488450$. The limiting curve contains two connected pieces, two pairs of complex conjugate endpoints, 12 complex conjugate T points, and one additional pair of complex conjugate multiple points at $x \approx -3/4 \pm 0.6614378278i$. The dominant sectors on the real x -axis are $\chi_{1,3}$ for $x < -1$; $\chi_{1,5}$ for $x \in (-1, x_c)$; and $\chi_{1,1}$ for $x > x_c$. We have found no region where the sector $\chi_{1,7}$ is dominant.

For $L = 4$ there are two real phase-transition points at $x = -1$ and $x = x_c \approx -0.7107999762$, which is a T point. The real line $[-1, x_c]$ belongs to the limiting curve. The dominant sectors on the real x -axis are: $\chi_{1,3}$ for $x < -1$; $\chi_{1,7}$ for $x \in (-1, x_c)$; and

$\chi_{1,1}$ for $x > x_c$. We have found a few small regions with dominant eigenvalue coming from the sector $\chi_{1,5}$; but we have found no region where the sector $\chi_{1,9}$ is dominant.

For $L = 5$ there are again two real phase-transition points at $x = -1$ and $x = x_c \approx -0.8004698444$, which is a T point. The real line $[-1, x_c]$ belongs to the limiting curve. The dominant sectors on the real x -axis are: $\chi_{1,3}$ for $x < -1$; $\chi_{1,9}$ for $x \in (-1, x_c)$; and $\chi_{1,1}$ for $x > x_c$.

For $L = 6$ there are two real phase-transition points at $x = -1$ and $x = x_c \approx -0.7033434642$, which is a T point. The real line $[-1, x_c]$ belongs to the limiting curve. The dominant sectors on the real x -axis are: $\chi_{1,3}$ for $x < -1$; $\chi_{1,11}$ for $x \in (-1, x_c)$; and $\chi_{1,1}$ for $x > x_c$.

In all cases, the point $x = -1$ is a multiple point where all the eigenvalues are equimodular with $|\lambda_i| = 1$.

6 Common features of the triangular-lattice limiting curves with free cyclic boundary conditions

The results discussed in Sections 5.1–5.3 allow us to make the following conjecture (in the same spirit as Conjecture 4.1 for the square-lattice case) that states that certain points in the complex x -plane belong to the limiting curve \mathcal{B}_L :

Conjecture 6.1 *For the triangular-lattice Q -state Potts model with $Q = B_p$ and width $L \geq 2$:*

1. *The points $x = -e^{\pm i\pi/p}$ belong to the limiting curve. At these points, all the eigenvalues are equimodular with $|\lambda_i| = 1$. Thus, they are in general multiple points.*
2. *For even $p \geq 6$, the point $x = -2/\sqrt{Q}$ always belongs to the limiting curve \mathcal{B}_L .¹⁸ Furthermore, if $p = 4, 6$, then the point $x = -1/\sqrt{Q}$ also belongs to \mathcal{B}_L .*

The phase diagram on the real x -axis (which contains the physical regime of the model) shows certain regularities that allow us to make the following conjecture:

Conjecture 6.2 *For the triangular-lattice Q -state Potts model with $Q = B_p$ and width $L \geq 2$:*

1. *For even p , the relevant eigenvalue on the physical line $v \in [-1, \infty)$ comes from the sector $\chi_{1,1}$. For odd p , the same conclusion holds for all $L \geq L_0$.¹⁹*

¹⁸This property has been verified for $p = 6$ and $2 \leq L \leq 7$, and for $p = 8, 10$ and $2 \leq L \leq 5$.

¹⁹For $p = 5$, we find that $L_0 = 5$. For $L = 2, 4$, the relevant eigenvalue belongs to the sector $\chi_{1,3}$ on a small portion of the antiferromagnetic physical line $v \in [-1, v_0]$.

2. The relevant eigenvalue belongs to the sector $\chi_{1,3}$ for all real $x < -2/\sqrt{Q}$.

The above conjectures also apply to the limiting case $p \rightarrow \infty$ (i.e., $Q = 4$). As for the square-lattice case, the multiple points $-e^{\pm i\pi/p} \rightarrow -1$ as $p \rightarrow \infty$ (Conjecture 6.1.1) in agreement with the fact that $x = -1$ is a multiple point for $Q = 4$. Furthermore, this is also in agreement with Conjecture 6.1.2, as in this limit, $-2/\sqrt{Q} = -1$. The dominant sectors for $p \rightarrow \infty$ also agree with Conjecture 6.2: on the physical line $v \in [-1, \infty)$ the dominant sector is $\chi_{1,1}$, and for $x < -1$, the dominant sector is $\chi_{1,3}$. More precisely, we can state the following conjecture based on the empirical observations reported above:

Conjecture 6.3 *For the triangular-lattice 4-state Potts model defined on a semi-infinite strip of width $L \geq 2$, there exists some $x_c(L) > -1$ such that $\chi_{1,1}$ is dominant for $x > x_c(L)$, $\chi_{1,2L-1}$ is dominant for $-1 < x < x_c(L)$, $\chi_{1,3}$ is dominant for $x < -1$.*

6.1 Asymptotic behavior for $|x| \rightarrow \infty$

Figures 9–12 show a similar scenario to the one discussed in Section 4: There are several unbounded outward branches with a clear asymptotic behavior for large $|x|$. Again, this scenario also holds in the limit $p \rightarrow \infty$ (See Figure 12). However there are quantitative differences with the scenario found for the square lattice. We should modify Conjecture 4.5 as follows:

Conjecture 6.4 *Let $\lambda_{\star,1}(L)$ (resp. $\lambda_{\star,3}(L)$) be the leading eigenvalue of the sector $\chi_{1,1}$ (resp. $\chi_{1,3}$) in the regime $|x| \rightarrow \infty$. Then*

$$\lambda_{\star,1}(L) = Q^{L-1} x^{3L-2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(L)}{Q^{k/2}} x^{-k} \right] \quad (6.1a)$$

$$\lambda_{\star,1}(L) - \lambda_{\star,3}(L) = 2^{L-1} \sqrt{Q} x^{L-1} + (L-1) 2^{L-1} x^{L-2} + O(x^{L-3}) \quad (6.1b)$$

Furthermore, we have that

$$b_1(L) = 3L - 2, \quad L \geq 2 \quad (6.2a)$$

$$b_2(L) = \frac{9}{2}L^2 - \frac{15}{2}L + 3, \quad L \geq 2 \quad (6.2b)$$

$$b_3(L) = \frac{9}{2}L^3 - \frac{27}{2}L^2 + 13L - 4, \quad L \geq 3 \quad (6.2c)$$

The first coefficients $b_k(L)$ are displayed in Table 2; the patterns displayed in (6.2) are easily verified. The coefficients $b_k(L)$ also depend on p for $k \geq 4$.

Conjecture 6.4 explains the number of outward branches in the triangular-lattice case, as well as the observed pattern for the outward branches. Again, these branches are defined by the equimodularity of the two leading eigenvalues

$$|\lambda_{\star,1}| = |\lambda_{\star,3}| = |\lambda_{\star,1} - \text{const. } x^{L-1} + O(x^{L-2})| \quad (6.3)$$

This implies that

$$\operatorname{Re} [\lambda_{\star,1} \bar{x}^{L-1}] = 0 \quad (6.4)$$

Then, if $x = |x|e^{i\theta}$, the above equation reduces to

$$\cos(\theta(2L-1)) = 0 \Rightarrow \theta_n = \frac{\pi}{2(2L-1)}(2n-1), \quad n = 1, 2, \dots, 2(2L-1) \quad (6.5)$$

Thus, we get the same asymptotic behavior as for the square lattice with the replacement $L \rightarrow 2L-1$.

7 Discussion of the results with free cyclic boundary conditions

The results obtained give indications on the phase diagram of the Potts model, as the accumulating points of the zeros of the partition function correspond to singularities of the free energy.

Extrapolating the curves obtained to $L \rightarrow \infty$ is not an easy matter, given that we have only access to relatively small L . However, in Sections 4 and 6 we have noted a number of features which hold for all L considered, and hence presumably for all finite L and also in the thermodynamic limit.

7.1 Ising model

The most transparent case is that of the Ising model ($p = 4$) on the square lattice. Let $D(x, r)$ denote the disk centered in x and of radius r . There are then four different domains of interest:

$$\mathcal{D}_1 = D(0, 1) \setminus D(-\sqrt{2}, 1) \quad (7.1a)$$

$$\mathcal{D}_2 = D(0, 1) \cap D(-\sqrt{2}, 1) \quad (7.1b)$$

$$\mathcal{D}_3 = D(-\sqrt{2}, 1) \setminus D(0, 1) \quad (7.1c)$$

$$\mathcal{D}_4 = \mathbb{C} \setminus \left(D(0, 1) \cup D(-\sqrt{2}, 1) \right) \quad (7.1d)$$

The $L \times N$ strips with even N are bipartite, whence the Ising model possesses the exact gauge symmetry $J \rightarrow -J$ (change the sign of the spins on the even sublattice). Since the limit $N \rightarrow \infty$ can be taken through even N only, the limiting curves \mathcal{B}_L should be gauge invariant. In terms of x the gauge transformation reads

$$x \rightarrow -\frac{x}{1+x\sqrt{2}}. \quad (7.2)$$

Note that it exchanges $\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_4$, while leaving \mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_3 invariant. In particular, the structures of \mathcal{B}_L around $x = -1/\sqrt{2}$ and $|x| = \infty$ discussed in Section 4 are equivalent.

On the other hand, the duality transformation $x \rightarrow 1/x$ is *not* a symmetry of \mathcal{B}_L : this is due to the fact that the boundary conditions prevent the lattice from being selfdual. Note that the duality exchanges $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_4$ and $\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$. But whilst there are many branches of \mathcal{B}_L in \mathcal{D}_4 , there are none in \mathcal{D}_1 .

The Ising model being very simple, we do however expect the fixed point structure on the real x -axis to satisfy duality. Combining the gauge and duality transformations one can connect all critical fixed points:

$$x_{\text{FM}} \xrightarrow{\text{gauge}} x_+ \xrightarrow{\text{duality}} x_- \xrightarrow{\text{gauge}} x_{\text{BK}}, \quad (7.3)$$

and the first and the last points in the series are selfdual. In the same way, all the non-critical (trivial) fixed points are connected:

$$x = 0 \xrightarrow{\text{duality}} |x| = \infty \xrightarrow{\text{gauge}} x = -1/\sqrt{2} \xrightarrow{\text{duality}} x = -\sqrt{2}, \quad (7.4)$$

and the first and the last points in the series are gauge invariant.

The reason that we discuss these well-known facts in detail is that the square-lattice Ising model is really the simplest example of how taking p rational (here, in fact, integer) profoundly modifies and enriches the fixed/critical point structure of the Potts model, as compared to the generic case of p irrational. Taking the limit $p \rightarrow 4$ through irrational values we would have had three equivalent $c = 1/2$ critical points, RG repulsive in x , situated at x_{FM} and x_{\pm} ; one $c = -25/2$ critical point, RG attractive in x , situated at x_{BK} ; and two non-critical (trivial) fixed points, RG attractive in x , situated at $x = 0$ and $|x| = \infty$. This makes up for a phase diagram on the real x -axis which is consistent in terms of renormalization group flows (see the top part of Fig. 2).

Conversely, sitting directly at $p = 4$ replaces this structure by the four repulsive $c = 1/2$ critical points (7.3) and the four attractive non-critical fixed points (7.4). This again gives a consistent scenario, in which notably the BK phase has disappeared (see the bottom part of Fig. 2). In other cases than the Ising model ($p > 4$ integer) we could expect the emergence of even more new (as compared to the case of irrational p) fixed points (critical or non-critical), which will in general be inequivalent (due in particular to the absence of the Ising gauge symmetry).

Going back to the case of complex x we can now conjecture:

Conjecture 7.1 *Let \mathcal{D}_1 be the domain defined in Eq. (7.1d). Then*

- *The points x such that*

$$Z_{L_F \times N_F}(Q = 2; x) = 0 \quad (\text{square lattice}) \quad (7.5)$$

for some L and N are dense in $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_1$.

- *There are no such points in \mathcal{D}_1 .*

We now turn to the Ising model on the triangular lattice. We first note that all the limiting curves \mathcal{B}_L are symmetric under the combined transformation $x \leftrightarrow -x - \sqrt{2}$ and $\chi_{1,1} \leftrightarrow \chi_{1,3}$. On the level of the coupling constant this can also be written $\exp(J) \rightarrow -\exp(J)$.

We also conjecture that

Conjecture 7.2 *Let \mathcal{D}_{tri} be the interior of the ellipse*

$$\left(\operatorname{Re} x + 1/\sqrt{2}\right)^2 + 3(\operatorname{Im} x)^2 = 3/2. \quad (7.6)$$

Then

- *The points x such that*

$$Z_{L_{\mathbb{F}} \times N_{\mathbb{P}}}(Q = 2; x) = 0 \quad (\text{triangular lattice}) \quad (7.7)$$

for some L and N are dense in $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_{\text{tri}}$.

- *There are no such points in \mathcal{D}_{tri} .*

7.2 Models with $p > 4$

For square-lattice models with $p > 4$ the phase diagram in the thermodynamic limit is expected to be more complicated. We can nevertheless conjecture that the four values x_c given by Eq. (1.4), and denoted by solid squares in the figures, correspond to phase transition points even for $Q = B_p$ a Beraha number. Accordingly, these points are expected to be accumulation points for the limiting curves \mathcal{B}_L , when $L \rightarrow \infty$.

But these four values of x are not the only fixed points. There is a complex fixed point structure between $x_-(Q)$ and $x_{\text{BK}}(Q)$, and between $x_{\text{BK}}(Q)$ and $x_+(Q)$. This is because for Q equal to a Beraha number, the thermal operator is repulsive at $x_{\text{BK}}(Q)$ (and not attractive as it would have been in the BK phase for irrational p), whereas it remains repulsive at $x_-(Q)$ and $x_+(Q)$. Therefore, there must at the very least be one attractive fixed point in each of the two intervals mentioned, in order for a consistent phase diagram to emerge. Indeed, for p even, there are two new fixed points, one of them being conjectured as $-\sqrt{Q}/2$ for all even p , and the other being equal to $-\sqrt{Q}$ only for $p = 4$ and $p = 6$. But our results for finite L are in favor of an even more complicated structure, involving more new fixed points. The structure of the phase diagram for p odd is further complicated by the emergence of segments of the real x -axis belonging to \mathcal{B}_L . It is however uncertain, whether these segments will stay of finite length in the $L \rightarrow \infty$ limit.

In the models with $p = 5, 6, \infty$ and on both the square and triangular lattices, we have found strong numerical evidence to conjecture that the partition-function zeros are *dense* in the whole complex x -plane with the exception of the interior of some domain.

The shape of this domain depends on both p and the lattice structure; and unlike in the Ising case ($p = 4$), we do not have enough evidence to conjecture its algebraic expression [c.f., Conjectures 7.1 and 7.2]. For the square lattice and fixed p , the limiting curves \mathcal{B}_L seem to approach (from the outside) the circles (1.5), especially in the ferromagnetic regime $\operatorname{Re} x \geq 0$. For the triangular lattice and $p = \infty$, the limiting curves in Figure 12 seem to approach the circle

$$\left(\operatorname{Re} x + \frac{1}{4}\right)^2 + (\operatorname{Im} x)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (7.8)$$

which goes through the bulk critical points $x = -1$ and $x = 1/2$.

7.3 The region $|x| \gg 1$

The emergence of unbounded branches of \mathcal{B}_L in the region of $|x| \gg 1$ is at first sight rather puzzling. Because when $|x|$ is large enough, we should expect the system to be non-critical, and thus be described by a *unique* leading eigenvalue of the transfer matrix. This is at least what happens for the q -state Potts model on a strip with cylindrical or free boundary conditions using the Fortuin–Kasteleyn representation [39, 40].

One of the main reasons for studying the limiting curves in the first place is that we wish to use them to detect the critical points of the models at hand. At a conformally invariant critical point there should be an infinite spectrum of transfer-matrix eigenvalues $|\Lambda_0| \geq |\Lambda_1| \geq \dots$ that become degenerate according to [46] $|\Lambda_i/\Lambda_0| \sim \exp(-2\pi x_i/L)$ when $L \rightarrow \infty$, where x_i are critical exponents. The limiting curves just tell us that the *two* dominant eigenvalues become degenerate, and not even with what finite-size corrections. Therefore the fact that a point x (even on the real axis) is an accumulation point of \mathcal{B}_L is not sufficient for x to be a critical point in the sense of the above scaling behavior.

The observed behavior for $|x| \gg 1$ just shows that the leading eigenvalues in sectors with different boundary conditions ($\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,3}$) come close. This is most transparent in the Ising case, where there is a bijection between RSOS heights and *dual* spins. It is easily seen that $\chi_{1,1}$ (resp. $\chi_{1,3}$) corresponds to *fixed* boundary conditions in the spin representation, with all the dual spins on the upper/lower rim being fixed as $+/+$ (resp. $+/-$). On the other hand, within a given sector there should be a finite gap between the leading and next-leading eigenvalues, in the region $|x| \gg 1$, signaling non-critical behavior.

7.4 Fixed cyclic boundary conditions

To avoid the (from the point of view of detecting critical behavior) spurious co-existence between two different boundary conditions, we should rather pick boundary conditions that break the Z_Q symmetry of the Q -state Potts model explicitly. We now illustrate this possibility by making a particular choice of fixed boundary conditions, which

has the double advantage of generalizing those for the Ising case (as discussed above) *and* enabling the corresponding Potts model partition function $Z_{L_X \times N_P}(Q; v)$ to be written as a sum of RSOS model partition functions.

Consider first the Potts model partition function \tilde{Z} on the dual lattice, with spins S_+ and S_- on the upper and lower exterior dual sites, and at the dual coupling \tilde{J} . Recall that the duality relation reads simply $v\tilde{v} = Q$. If we impose *free* boundary conditions on S_{\pm} , we have by the fundamental duality relation [1]

$$Q^{V-E/2-1} x^E \tilde{Z}(Q; Q/v) = Z(Q; v), \quad (7.9)$$

where E (resp. V) is the total number of lattice edges (resp. direct sites). Note that $V = LN$, and that $E = 2V - N$ (resp. $E = 3V - 2N$) for the square (resp. triangular) lattice. We now claim that this object with *fixed and equal values* for S_{\pm} can again be expressed in terms of $K_{1,2j+1}$, for a generic p . The precise relation reads

$$Z_{L_X \times N_P}(Q; v) \equiv Q^{V-E/2} x^E \tilde{Z}(Q; Q/v) \Big|_{S_+=S_-} = Q^{LN/2} \sum_{j=0}^L \beta_j(p) K_{1,2j+1}(p, L; x), \quad (7.10)$$

which should be compared with Eq. (2.3). We henceforth refer to $Z_{L_X \times N_P}(Q; v)$ as the partition function of the Potts model with fixed cyclic boundary conditions (even though it would be more precise to say that it is actually the two exterior dual spins that get fixed). The amplitudes read

$$\beta_j(p) = \frac{S_j(p)}{Q} + (-1)^j \left(1 - \frac{1}{Q}\right). \quad (7.11)$$

Note that for arbitrary values of Q , the partition function $\tilde{Z}(Q; Q/v) \Big|_{S_+=S_-}$ can be defined by its FK cluster expansion on the dual lattice, by giving a weight Q to clusters that do not contain any of the two exterior sites, and a weight 1 to clusters containing at least one of two exterior sites. Eq. (7.10) is a special case of a more general relation which will be proved and discussed elsewhere.

Now, for p integer, we would like to express $Z_{L_X \times N_P}(Q; v)$ in terms of the $\chi_{1,2j+1}(p, L; x)$ as we did in the case of free cyclic boundary conditions. But because of the $(-1)^j$ in the expression of $\beta_j(p)$, we have $\beta_{np+j}(p) = \beta_j(p)$ and $\beta_{(n+1)p-1-j} = -\beta_j$, cf. Eq. (2.4) for the case of $S_j(p)$, only if p is even. For p even, we can express

$$Z_{L_X \times N_P}(Q; v) = Q^{LN/2} \sum_{j=0}^{\lfloor (p-2)/2 \rfloor} \beta_j(p) \chi_{1,2j+1}(p, L; x) \quad (p \text{ even}) \quad (7.12)$$

which should be compared with Eq. (2.5). For p odd, there does not appear to exist an expansion of $Z_{L_X \times N_P}$ in terms of $\chi_{1,2j+1}$.

Note in particular that $\beta_1(p) = 0$ for any p . This has the consequence of eliminating the $\chi_{1,3}$ sector from the partition function, and, as we now shall see, modify the $|x| \gg 1$ behavior of the phase diagram.

8 Square-lattice Potts model with fixed cyclic boundary conditions

The limiting curves \mathcal{B}_L with fixed cyclic boundary conditions (see Figs. 13–16) are very similar to those obtained in Ref. [39] for the Potts model with fully free boundary conditions. On the other hand, we have already seen that the \mathcal{B}_L with free cyclic boundary conditions are very different.

Before presenting the results for fixed cyclic boundary conditions in detail we wish to explain this similarity. We proceed in two stages. First we present an argument why the limiting curves corresponding to just the sector $\chi_{1,1}$ almost coincide with those for fully free boundary conditions. Second, we take into account the effect of adding other sectors $\chi_{1,2j+1}$.

Let T_{FK} be the transfer matrix in the FK representation with zero bridges (cf. footnote 6), and let λ_i be its eigenvalues.²⁰ Then one has, with cyclic boundary conditions

$$K_{1,1} = \text{tr } \mathsf{T}_{\text{FK}}^N = \sum_i \lambda_i^N. \quad (8.1)$$

Due to the coupling of $K_{1,2j+1}$, given by Eq. (2.6), the eigenvalues of T_1 (i.e., the transfer matrix that generates $\chi_{1,1}$, cf. Eq. (2.8)) form only a subset of the eigenvalues of T_{FK} . More precisely,

$$\chi_{1,1} = \sum_i \tilde{\alpha}_i \lambda_i^N, \quad (8.2)$$

where $\tilde{\alpha}_i = 0$ or 1 are *independent* of x . Note that when $L < p - 1$, Eq. (2.6) gives simply $\chi_{1,1} = K_{1,1}$, and so in that case all $\tilde{\alpha}_i = 1$.

Meanwhile, the partition function of the Potts model with fully free boundary conditions is given by [32]

$$Z_{\text{free}} = \langle f | \mathsf{T}_{\text{FK}}^N | i \rangle = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \lambda_i^N, \quad (8.3)$$

where the amplitudes α_i are due to the free *longitudinal* boundary conditions. Note that some of the α_i could vanish identically, and indeed many of them *do* vanish. For example, in the case of the square lattice, the vectors $|i\rangle$ and $\langle f|$ are symmetric under a reflection with respect to the axis of the strip, whence only the λ_i corresponding to eigenvectors which are symmetric under this reflection will contribute to Z_{free} .

For $x > 0$ real and positive, it follows from simple probabilistic arguments that the dominant eigenvalue λ_0 will reside in the zero-bridge sector $K_{1,1}$ and is not canceled by eigenvalues coming from other sectors. Therefore $\tilde{\alpha}_0 = 1$. On the other hand, the Perron-Frobenius theorem and the structure of the vectors $|i\rangle$ and $\langle f|$ implies that $\alpha_0 > 0$. We conclude that the dominant term in the expansions of $\chi_{1,1}$ and Z_{free} are proportional. By

²⁰We label the λ_i by letting λ_0 be the eigenvalue which dominates for x real and positive, and using lexicographic ordering [32] for the remaining eigenvalues.

analytic continuation the same conclusion holds true in some domain in the complex x -plane containing the positive real half-axis. Moving away from that half-axis, a first level crossing will take place when λ_0 crosses another eigenvalue λ_i . If none of the functions α_i and $\tilde{\alpha}_i$ are *identically* zero, the corresponding branch of the limiting curve \mathcal{B}_L coincides in the two cases. Further away from the positive real half-axis other level crossings may take place, and the limiting curves remain identical until a level crossing between λ_j and λ_k takes place in which either $\alpha_j = 0$ and $\tilde{\alpha}_j \neq 0$, or conversely $\alpha_j \neq 0$ and $\tilde{\alpha}_j = 0$. When $L < p - 1$ the only possibility is the former one, since all $\tilde{\alpha}_i = 1$.

If we now compare the limiting curves of Z_{free} and Z_{RSOS} , the latter being defined as some linear combination of $\chi_{1,2j+1}$ (containing $\chi_{1,1}$), the above argument will be invalidated if the first level crossing in Z_{RSOS} when moving away from the positive half-axis involves an eigenvalue from $\chi_{1,2j+1}$ with $j > 0$.

With free cyclic boundary conditions, Z_{RSOS} contains $\chi_{1,3}$. The first level crossing involves eigenvalues from $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,3}$ (cf. the observed unbounded branches) and is situated very “close” [cf. Eqs. (4.7) and (6.5) with $n = 1$] to the positive real half-axis. Accordingly, the limiting curves \mathcal{B}_L do not at all resemble those with fully free boundary conditions. On the other hand, when $\chi_{1,3}$ is excluded (i.e., in the case of fixed cyclic boundary conditions) the first level crossing is between two different eigenvalues from the $\chi_{1,1}$ sector (see Figs. 13–16).

8.1 Ising model ($p = 4$)

We have studied the limiting curves given by the sector $\chi_{1,1}$ in the square-lattice Ising case. The results are displayed in Figure 13. It is clear that there are no outward branches, as there is a unique dominant eigenvalue in the region $|x| \gg 1$. Indeed, this agrees with the expected non-critical phase. These curves are very similar to those obtained using the Fortuin-Kasteley representation for a square-lattice strip with *free* boundary conditions [39]. In particular, for even $L = 2, 4$ we find that these curves do in fact *coincide*. However, for $L = 3$ we find disagreements; but only in the region $\text{Re } v < -1$. Namely, the complex conjugate closed regions defined by the multiple points $x = -e^{-i\pi/4}$ and $x = -\sqrt{2}$ (see Figure 13b) are replaced by two complex conjugate arcs emerging from $x = -e^{-i\pi/4}$. These arcs bifurcate at two complex conjugate T points.

For $L = 2$ we find two pairs of complex conjugate endpoints at $x \approx -0.5558929703 \pm 0.1923469388i$, and $x \approx 0.5558929703 \pm 1.6065605012i$. There is a double endpoint at $x = -\sqrt{2}$.

For $L = 3$ we also find two pairs of complex conjugate endpoints at $x \approx -0.5054436896 \pm 0.1404486742i$, and $x \approx 0.9624601506 \pm 1.1627733180i$. There is a multiple point at $q = -\sqrt{2}$, and a pair of complex conjugate multiple points at $q = -e^{\pm i\pi/4}$. These multiple points also appear in $L = 4$.

For $L = 4$ we find two connected components in the limiting curve. There are two pairs of complex conjugate T points at $q \approx -1.1111427356 \pm 0.8231882219i$, and

$q \approx -0.9473515724 \pm 0.4894779296 i$. We also find four complex conjugate pairs of endpoints at $q \approx -0.6052879436 \pm 0.3554255102 i$, $q \approx -0.4820292937 \pm 0.1111133833 i$, $q \approx -0.3346743307 \pm 1.3000737077 i$, and $q \approx 1.0790506924 \pm 0.8817674400 i$.

8.2 Three-state Potts model ($p = 6$)

We have studied the limiting curves given by the sectors $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,5}$, cf. Eq. (7.12). The results are displayed in Figure 14. We have compared these curves with those obtained for a square-lattice strip with free boundary conditions [39]. We find that they agree almost perfectly in the region $\operatorname{Re} x \geq -1$. The only exceptions are the tiny complex conjugate branches emerging from the multiple points $-e^{-i\pi/6}$ for $L = 3, 4$ and pointing to x_{BK} . The differences are in both cases rather small and they are away from the real x -axis. In the region $\operatorname{Re} x < -1$, however, the differences between the two boundary conditions are sizeable. For free boundary conditions the closed regions tend to disappear, or, at least, to diminish in number and size.

9 Triangular-lattice Potts model with fixed cyclic boundary conditions

9.1 Ising model ($p = 4$)

We have studied the limiting curves given by the sector $\chi_{1,1}$ in the triangular-lattice Ising case. The results are displayed in Figure 15, and they are the same than those obtained with the Fortuin-Kasteleyn representation [40], with free boundary conditions, for all L . Therefore, we see a non-trivial effect of the lattice: for the triangular lattice, the dominant eigenvalues always comes from $K_{1,1}$, contrary to the case of the square lattice.

For $L = 2$ we find two real endpoints at $q = -\sqrt{2}$ and $q = -1/\sqrt{2}$, and an additional pair of complex conjugate endpoints at $x \approx 0.3535533906 \pm 0.9354143467 i$. At $x = -1$ there is a crossing between the two branches of the limiting curve.

For $L = 3$ we find two real endpoints at $q = -\sqrt{2}$ and $q = -1/\sqrt{2}$, and four pairs of complex conjugate endpoints at $x \approx -1.4346151869 \pm 0.9530458628 i$, $x \approx 0.5477064083 \pm 0.6206108204 i$, $x \approx -1/\sqrt{2} \pm 0.4918781633 i$, and $x \approx -1/\sqrt{2} \pm 0.9374415716 i$. The limiting curve contains two complex conjugate vertical lines determined by the latter two pairs of endpoints, and a horizontal line determined by the two real endpoints. We have found three pairs of complex conjugate T points at $x \approx -1\sqrt{2} \pm 0.5353475100 i$, $x \approx -1\sqrt{2} \pm 0.7246267519 i$, and $x \approx -1\sqrt{2} \pm 0.8539546894 i$. Finally, there is a multiple point at $x \approx -0.9681295813$.

For $L = 4$, we again find a horizontal real line bounded by two real endpoints at $x = -\sqrt{2}$, and $x = -1/\sqrt{2}$, and a pair of complex conjugate vertical lines bounded by the endpoints $x \approx -1\sqrt{2} \pm 1.0514178378 i$, and $x \approx -1\sqrt{2} \pm 0.3816638845 i$. We have

found and additional pair of endpoints at $x \approx 0.5890850526 \pm 0.4519358255i$. There are five pairs of T points; two of them are located on the line $\operatorname{Re} x = -1\sqrt{2}$. These are $x \approx -1\sqrt{2} \pm 0.4336035301i$, and $x \approx -1\sqrt{2} \pm 0.7394246716i$. The other three pairs are $x \approx -1.0712333535 \pm 0.7555078808i$, $x \approx -1.6123945698 \pm 0.8042942359i$, and $x \approx -0.3186094544 \pm 0.9388965869i$. We find four bulb-like regions around the latter two pairs of T points. Finally, there is a multiple point at $x \approx -0.9415556904$, and a complex conjugate pair of multiple points at $q = -e^{\pm i\pi/4}$.

We have compared the above-described limiting curves with those of a triangular-lattice model with *free* boundary conditions [40]. The agreement is perfect on the whole complex x -plane for $L = 2, 3, 4$.

9.2 Three-state Potts model ($p = 6$)

We have studied the limiting curves given by the sectors $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,5}$, cf. Eq. (7.12). The results are displayed in Figure 16. As for the square-lattice case discussed in Section 8.2, the limiting curves coincide with those obtained with free boundary conditions in a domain containing the real positive v -axis. In particular, the agreement is perfect in the first regime $\operatorname{Re} v \geq 0$. In the second regime $-1 \leq \operatorname{Re} v \leq 0$, the coincidence holds except on a small region close to $\operatorname{Re} v = -1$, and $|\operatorname{Im} v|$ small for $L = 3, 4$. In both cases, the branches that emerge from $x = -1/\sqrt{3}$ and penetrate inside the second regime (and defining a closed region), change their shape for free boundary conditions (and in particular, the aforementioned closed regions are no longer closed). Finally, in the third regime $\operatorname{Re} v < -1$, the limiting curves for both types of boundary conditions clearly differ. As for the square-lattice three-state model, free boundary conditions usually imply less and smaller closed regions.

10 Conclusion and outlook

We have studied the complex-temperature phase diagram of the Q -state Potts model on the square and triangular lattices with $Q = 4 \cos^2(\pi/p)$ and p integer. The boundary conditions were taken to be cyclic so as to make contact with the theory of quantum groups [6, 7, 24, 27, 28], which provides a framework for explaining how a large amount of the eigenvalues of the cluster model transfer matrix—defined for generic values of p —actually do not contribute to the partition function Z for p integer. Moreover, for p integer, the exact equivalence (2.5) between the Potts and the A_{p-1} RSOS model provides an efficient way of computing exactly those eigenvalues that do contribute to Z . Using the Beraha-Kahane-Weiss theorem [30], this permitted us to compute the curves \mathcal{B}_L along which partition function zeros for cyclic strips of finite width L accumulate when the length $N \rightarrow \infty$.

The RSOS model has the further advantage of associating a quantum number j with each eigenvalue, which is related to the number of clusters of non-trivial topology

with respect to the periodic direction of the lattice and to the spin S_z of the associated six-vertex model. This number then characterizes each of the phases (enclosed regions) defined by \mathcal{B}_L .

The curves \mathcal{B}_L turn out to exhibit a remarkable regularity in L —at least in some respects—thus enabling us to make a number of conjectures about the thermodynamic limit $L \rightarrow \infty$. On the other hand, even a casual glance at the many figures included in this paper should convince the reader that the $L \rightarrow \infty$ limit of the models at hand might well conceal many complicated features and exotic phase transitions. Despite of these complications, we venture to summarize our essential findings, by regrouping them in the same way as in the list of open issues presented in the Introduction:

1. The points $x_{\text{FM}}(Q)$ and $x_{-}(Q)$ (and for the square lattice also its dual $x_{+}(Q)$), that act as phase transition points in the generic phase diagram, should play a similar role for integer p . This can be verified from the figures in which it is more-or-less obvious that the corresponding red solid squares will be traversed, or pinched, by branches of \mathcal{B}_L in the $L \rightarrow \infty$ limit. What is maybe more surprising is that also $x_{\text{BK}}(Q)$ has a similar property, despite of the profoundly changed physics inside the BK phase. Indeed, in most cases, $x_{\text{BK}}(Q)$ is either exactly on or very close to a traversing branch of \mathcal{B}_L . It remains an open question to characterize exactly the nature of the corresponding phase transition.
2. It follows from Conjecture 4.1.2 that for the square lattice, \mathcal{B}_{∞} will contain $x = -\sqrt{Q}/2$ for p integer and $x = -\sqrt{Q}$ for Q integer. For the triangular lattice the corresponding Conjecture 6.1.2 involves the points $x = -2/\sqrt{Q}$ for p integer and $x = -1/\sqrt{Q}$ for Q integer. Thus, both lattices exhibit a phase transition on the chromatic line $x = -1/\sqrt{Q}$ or its dual, but only for integer Q . It is tempting to speculate that the chromatic line and its dual might play symmetric roles upon imposing fully periodic boundary conditions, but that remains to be investigated.
3. We have found that with free cyclic boundary conditions, partition functions zeros are dense in a substantial region of the phase diagram, including the region $|x| \gg 1$. See in particular Conjectures 4.3–4.4 for the square lattice and Conjecture 6.4 for the triangular lattice. For the Ising model ($Q = 2$), the finite-size data is conclusive enough to make a precise guess as to the extent of that region, cf. Conjectures 7.1–7.2. We have argued (in Section 7.4) and observed explicitly (in Sections 8–9) that this feature is completely modified by changing to fixed cyclic boundary conditions. Another example of the paramount role of the boundary conditions has been provided with the argument of Section 8 that when restricting to the sector $\chi_{1,1}$ one sees essentially the physics of free longitudinal boundary conditions.
4. It is an interesting exercise to compare the limiting curves found here with the numerically evaluated effective central charge shown in Figs. 23–25 of Ref. [8]. In particular, for $p = 5$ it does not seem far-fetched that the two new phase transitions identified in Fig. 23 of that paper might be located exactly at $x = -1/\sqrt{Q} \simeq -0.618$

and $x = -\sqrt{Q}/2 \simeq -0.809$. These points (for the former point, actually its dual, but we remind that the transverse boundary conditions in Ref. [8] are periodic) are among the special points discussed in item 2 above.

5. We have provided some evidence that *on the triangular lattice* for $Q = 4$ (i.e., $p = \infty$) phases with arbitrary high j will exist close to the point $x = -1$. For the square lattice we have only found phases with $j \leq 5$. This should be compared with the arbitrarily high values of S_z taken when approaching $(Q, x) = (4, -1)$ from within the BK phase in the generic case [7, 34].

It would be interesting to extend the study to fully periodic (toroidal) boundary conditions. This would presumably diminish the importance of finite-size corrections, but note that the possibility of the non-trivial clusters having a more complicated topology makes the link to the quantum group more subtle.

Another line of investigation would be to study the Potts model for a generic value of Q , i.e., to transpose what we did for the $\chi_{1,2j+1}$ to the $K_{1,2j+1}$. Indeed, studies for v given in the complex Q -plane have already been made, for example in Ref. [34] for $v = -1$, but to our knowledge no study exists for Q given in the complex v -plane. Note that the results are very different in these two cases. For example, with L fixed and finite, the Beraha number $Q = B_p$ are limiting points in the complex Q -plane for fixed $v = -1$ (and presumably everywhere in the Berker-Kadanoff phase), but $v = -1$ is not a limiting point in the complex v -plane for fixed $Q = B_p$ ($p > 4$). This is just one example that different limits may not commute and the very concept of “a thermodynamic limit” for antiferromagnetic models has to be manipulated with great care.

Acknowledgments

We thank to Hubert Saleur for useful comments on the first stage of this work, Robert Shrock for correspondence, and Alan Sokal for discussions on closely related projects. J.S. thanks the warm hospitality of the members of the LPTMS, where part of this work was done. This research has been partially supported by U.S. National Science Foundation grants PHY-0116590 and PHY-0424082, and by MEC (Spain) grants MTM2004-01728 and FIS2004-03767.

A Dimension of the transfer matrix

The dimension of the transfer matrices $\mathsf{T}_k(p, L)$ can be obtained in closed form. First note that for given p , $k = 2j + 1$, and L , the dimension of the transfer matrix $\mathsf{T}_k(p, L)$

$$d_k^{(p)}(L) = \dim \mathsf{T}_k(p, L) \tag{A.1}$$

equals the number of random walks (with up and down steps) of length $2L$ steps that start at height 1 and end at height k . This random walks have to evolve between a “ceiling” 1 and a “roof” $m = p - 1$.

Let us now proceed in steps. For $k = 1$ and $m = \infty$ we have just the Catalan numbers. Thus, if z is the fugacity of a single step, then the ordinary generating function (o.g.f.) is

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} C_L z^{2L} \quad (\text{A.2})$$

We now keep $k = 1$, and we introduce the “roof” m . A walk is either empty or consists of two independent parts. The first part is between the very first step (necessarily up) and the first down step that hits the ceiling (i.e., 1); the second part is the rest of the walk (which may be empty). For instance, if $p = 4$ ($m = 3$) and $L = 3$, a possible walk can be 1–2–3–2–1–2–1. The first part of this walk is 1–2–3–2–1; while the second part of the walk is 1–2–1. If we take away the first and last steps of the first part (i.e., we are left with 2–3–2), we have a walk with $m \rightarrow m - 1$ (as this is equivalent to 1–2–1). Thus, the o.g.f. $f(m, z)$ satisfies the equation

$$f(m, z) = 1 + z^2 f(m - 1, z) f(m, z) \quad (\text{A.3})$$

which is solved by the recurrence

$$f(m, z) = \frac{1}{1 - z^2 f(m - 1, z)} \quad (\text{A.4a})$$

$$f(1, z) = 1 \quad (\text{A.4b})$$

Finally, let us consider the general case with $k > 1$. In this case, the walk cannot be empty, and the first step is necessarily up. There are two classes of walks. In the first one, the walk never hits the ceiling 1 again. For instance if $p = 4$, $L = 3$, and $k = 3$, a walk belonging to this class is given by 1–2–3–2–3–2–3. So it consists in one step and a walk with a raised ceiling (i.e., 2–3–2–3–2–3 is equivalent to 1–2–1–2–1–2 with roof $m = 2$). In the second class, the walk does hit the ceiling somewhere for the first time, so we can split the walk into two independent parts as in the preceding paragraph. Thus, the o.g.f. satisfies the equation

$$f(m, k, z) = z f(m - 1, k - 1, z) + z^2 f(m - 1, z) f(m, k, z) \quad (\text{A.5})$$

which can be solved by the recurrence

$$f(m, k, z) = \frac{z f(m - 1, k - 1, z)}{1 - z^2 f(m - 1, z)} \quad (\text{A.6a})$$

$$f(m, 1, z) = f(m, z) \quad (\text{A.6b})$$

where $f(m, z)$ is given by (A.4). The dimensions $d_k^{(p)}(L)$ can be read off immediately

$$f(m, k, z) = \sum_{L=0}^{\infty} d_k^{(p)}(L) z^{2L} \quad (\text{A.7})$$

In the particular case $p = 4$, we easily find that

$$f(3, 1, z) = \frac{1 - z^2}{1 - 2z^2} = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} 2^{L-1} z^{2L} \quad (\text{A.8a})$$

$$f(3, 3, z) = \frac{z^2}{1 - 2z^2} = \sum_{L=1}^{\infty} 2^{L-1} z^{2L} \quad (\text{A.8b})$$

For the other cases, we can get closed formulas for the generating functions, and obtain the result

$$d_k^{(p)}(L) = \sum_{n \geq 0} (\gamma_{np+j}(L) - \gamma_{(n+1)p-1-j}(L)) . \quad (\text{A.9})$$

where $k = 2j + 1$ and we have defined $\gamma_j(L) \equiv 0$ for $j > L$. The $\gamma_j(L)$ are given by

$$\gamma_j(L) = \binom{2L}{L-j} - \binom{2L}{L-j-1} = \frac{2j+1}{L+j+1} \binom{2L}{L-j} . \quad (\text{A.10})$$

This result can also be obtained by another method, which consists of calculating the number $\gamma_j(L)$ of states of highest weight with spin $S = S_z = j$ for the vertex model and taking into account the coupling of $U_q(SU(2))$ between different j for p integer [28]. Yet another method consists in relating $d_k^{(p)}$ to the number of paths on the Dynkin diagram A_{p-1} going from 1 to $2j + 1$ and using the eigenvectors of the adjacency matrix [27].

The $\gamma_j(L)$ can also be interpreted as the dimension of the transfer matrix in the FK representation with j bridges, i.e., for a generic (irrational) value of p . In that context, Eq. (A.9) represents the reduction of the dimension that takes case at p integer when going from the FK to the RSOS representation (with spin j), and thus, is completely analogous to Eq. (2.6) for the generation functions.

On the chromatic line $x = -1/\sqrt{Q}$, $\gamma_j(L)$ is replaced by a smaller dimension $\Gamma_j(L)$, because the operator $V = \prod V_i$ is a projector ($V^2 = V$) that projects out nearest-neighbor connectivities (i.e. the action of V on states with nearest neighbours connected gives zero). We do not know of any explicit expression for $\Gamma_j(L)$, but it verifies the following recursion relation [47]

$$\Gamma_0(L+1) = \Gamma_1(L) \quad (\text{A.11a})$$

$$\Gamma_j(L+1) = \Gamma_{j-1}(L) + \Gamma_j(L) + \Gamma_{j+1}(L) \text{ for } j > 0 \quad (\text{A.11b})$$

with the convention that $\Gamma_j(L) = 0$ for $j < 0$ and the conditions $\Gamma_j(L) = 0$ for $j > L$, $\Gamma_L(L) = 1$, and $\Gamma_0(1) = 0$. In particular, it can be shown that $\Gamma_0(L) = M_{L-1}$, where M_{L-1} is a Motzkin number and corresponds to the number of non-crossing non-nearest neighbor partitions of $\{1, \dots, L\}$ (i.e., it is the dimension of the cluster transfer matrix in the case of free longitudinal boundary conditions and $x = -1/\sqrt{Q}$). Note that in the RSOS representation (in the case of p integer), we *cannot* reduce the dimension of the T_{2j+1} , since although V is a projector in the RSOS representation too the states which are projected out are linear combinations of the basis states (corresponding to a

given configuration of the heights), and not simply basis states as in the case of the FK representation. But because of Eq. (2.6), the number $d_j(L)$ of non null eigenvalues of T_{2j+1} is given by Eq. (A.9) with $\gamma_j(L)$ replaced by $\Gamma_j(L)$. In particular, for $Q = 3$ we find using the recursion relation that $d_1(L) = d_5(L) = 2^{L-2}$ and $d_3(L) = 2^{L-1}$. Indeed, for $x = -1/\sqrt{Q}$, the three-state Potts model is equivalent to a homogeneous six-vertex model with all the weights equal to 1 [19] (note that this six-vertex model is different from the one we considered before).

References

- [1] F.Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982); **55**, 315 (E) (1983).
- [2] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London–New York, 1982).
- [3] P.W. Kasteleyn and C.M. Fortuin, J. Phys. Soc. Japan **26** (Suppl.), 11 (1969).
- [4] C.M. Fortuin and P.W. Kasteleyn, Physica **57**, 536 (1972).
- [5] B. Nienhuis, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 11, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic, London, 1987).
- [6] H. Saleur, Commun. Math. Phys. **132**, 657 (1990).
- [7] H. Saleur, Nucl. Phys. B **360**, 219 (1991).
- [8] J.L. Jacobsen and H. Saleur, *The antiferromagnetic transition for the square-lattice Potts model*, cond-mat/0512056.
- [9] R.J. Baxter, Proc. Roy. Soc. London A **383**, 43 (1982).
- [10] R.J. Baxter, H.N.V. Temperley and S.E. Ashley, Proc. Roy. Soc. London A **358**, 535 (1978).
- [11] R.J. Baxter, J. Phys. A **19**, 2821 (1986).
- [12] R.J. Baxter, J. Phys. A **20**, 5241 (1987).
- [13] J.L. Jacobsen, J. Salas and A.D. Sokal, Phase diagram and renormalization-group flow for the square-lattice and triangular-lattice Potts models, in preparation.
- [14] J.L. Jacobsen, J. Salas and A.D. Sokal, J. Stat. Phys. **119**, 1153 (2005), cond-mat/0401026.
- [15] J.L. Jacobsen, J. Salas and A.D. Sokal, J. Stat. Phys. **112**, 921 (2003), cond-mat/0204587.
- [16] J. Stephenson, J. Math. Phys. **5**, 1009 (1964).
- [17] H.W.J. Blöte and H.J. Hilhorst, J. Phys. A **15**, L631 (1982).
- [18] B. Nienhuis, H.J. Hilhorst and H.W.J. Blöte, J. Phys. A **17**, 3559 (1984).
- [19] A. Lenard, cited in E.H. Lieb, Phys. Rev. **162**, 162 (1967) at pp. 169–170.
- [20] R.J. Baxter, J. Math. Phys. **11**, 3116 (1970).
- [21] R.J. Baxter, J. Math. Phys. **11**, 784 (1970).

- [22] J. Kondev, J. de Gier and B. Nienhuis, J. Phys. A **29**, 6489 (1996).
- [23] S.J. Ferreira and A.D. Sokal, Phys. Rev. B **51**, 6727 (1995), hep-lat/9405015.
- [24] V. Pasquier, J. Phys. A **20**, L1229 (1987).
- [25] G.E. Andrews, R.J. Baxter and P.J. Forrester, J. Stat. Phys. **35**, 193 (1984).
- [26] D. Huse, Phys. Rev. B **30**, 3908 (1984).
- [27] H. Saleur and M. Bauer, Nucl. Phys. B **320**, 591 (1989).
- [28] V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. B **330**, 523 (1990).
- [29] J.-F. Richard and J.L. Jacobsen, Nucl. Phys. B **731**, 335 (2005), math-ph/0507048.
- [30] S. Beraha, J. Kahane and N.J. Weiss, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72**, 4209 (1975).
- [31] A.D. Sokal, Combin. Probab. Comput. **13**, 221 (2004), cond-mat/0012369
- [32] J. Salas and A.D. Sokal, J. Stat. Phys. **104**, 609 (2001), cond-mat/0004330.
- [33] W. Janke, D.A. Johnston and R. Kenna, cond-mat/0512352.
- [34] J.L. Jacobsen and J. Salas, Transfer Matrices and Partition-Function Zeros for Antiferromagnetic Potts Models IV. Chromatic polynomial with cyclic boundary conditions, J. Stat. Phys. in press, cond-mat/0407444.
- [35] V. Fateev and Al. Zamolodchikov, Phys. Lett. B **271**, 91 (1991).
- [36] R.J. Baxter, S.B. Kelland and F.Y. Wu, J. Phys. A **9**, 397 (1976).
- [37] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal field theory* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [38] A. Rocha-Caridi, in S. Lepowski, S. Mandelstam and I.M. Singer (eds.), *Vertex operators in mathematics and physics*, MSRI Publications No. 3 (Springer, New York, 1985), p. 451.
- [39] S.-C. Chang, J. Salas and R. Shrock, J. Stat. Phys. **107**, 1207 (2002), cond-mat/0108144.
- [40] S.-C. Chang, J.L. Jacobsen, J. Salas and R. Shrock, J. Stat. Phys. **114**, 763 (2004), cond-mat/0211623.
- [41] S.-C. Chang and R. Shrock, Physica A **286**, 189 (2000), cond-mat/0004181.
- [42] S.-C. Chang and R.S. Shrock, Physica A **296**, 234 (2000), cond-mat/0011503.
- [43] R.S. Shrock, Physica A **283**, 388 (2000), cond-mat/0001389.

- [44] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd edition (The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996).
- [45] J. Adler, A. Brandt, W. Janke and S. Shmulyan, J. Phys. A **28**, 5117 (1995).
- [46] J.L. Cardy, J. Phys. A **17**, L385 (1984).
- [47] S.-C. Chang and R. Shrock, Physica A **296**, 131 (2001), cond-mat/0005232.

p	L	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
4	2	3	4					
	3	5	10	13				
	4	7	21	37	48			
	5	9	36	86	143	186		
	6	11	55	167	352	564	739	
	7	13	78	288	742	1444	2256	2973
5	2	3	$3 + \sqrt{B_5}$					
	3	5	10	$10 + 3\sqrt{B_5}$				
	4	7	21	$35 + 2\sqrt{B_5}$	$35 + 13\sqrt{B_5}$			
	5	9	36	$84 + 2\sqrt{B_5}$	$126 + 17\sqrt{B_5}$	$128 + 60\sqrt{B_5}$		
	6	11	55	$165 + 2\sqrt{B_5}$	$330 + 22\sqrt{B_5}$	$464 + 102\sqrt{B_5}$	$479 + 277\sqrt{B_5}$	
6	2	3	5					
	3	5	10	16				
	4	7	21	39	61			
	5	9	36	88	160	250		
	6	11	55	169	374	670	1050	
	7	13	78	290	769	1605	2838	4470
∞	2	3	6					
	3	5	10	19				
	4	7	21	41	70			
	5	9	36	90	177	318		
	6	11	55	171	396	780	1395	

Table 1: First L coefficients a_k for the leading eigenvalue $\lambda_{*,1}(L)$ coming from the sector $\chi_{1,1}$ for a square-lattice strip of width L .

p	L	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
4	2	4	6	6				
	3	7	21	35	37	31		
	4	10	45	120	212	264	244	184
	5	13	78	286	717	1305	1793	1919
	6	16	120	560	1822	4392	8146	11940
	7	19	171	969	3878	11658	27349	51389
	8	22	231	1540	7317	26370	74927	172304
5	2	4	6	$4 + 2\sqrt{B_5}$				
	3	7	21	35	$35 + 2\sqrt{B_5}$	$21 + 10\sqrt{B_5}$		
	4	10	45	120	$210 + 2\sqrt{B_5}$	$252 + 12\sqrt{B_5}$	$210 + 34\sqrt{B_5}$	$122 + 64\sqrt{B_5}$
	5	13	78	286	$715 + 2\sqrt{B_5}$	$1287 + 18\sqrt{B_5}$	$1716 + 77\sqrt{B_5}$	$1718 + 203\sqrt{B_5}$
	6	16	120	560	$1820 + 2\sqrt{B_5}$	$4368 + 24\sqrt{B_5}$	$8008 + 138\sqrt{B_5}$	$11442 + 500\sqrt{B_5}$
6	2	4	6	8				
	3	7	21	35	39	41		
	4	10	45	120	214	276	278	252
	5	13	78	286	719	1323	1870	2126
	6	16	120	560	1824	4416	8284	12444
	7	19	171	969	3880	11688	27566	52394
∞	2	4	6	10				
	3	7	21	35	41	51		
	4	10	45	120	216	288	312	324
	5	13	78	286	721	1341	1947	2337
	6	16	120	560	1826	4440	8422	12952

Table 2: First $\min(2L - 1, 7)$ coefficients b_k for the leading eigenvalue $\lambda_{*,1}(L)$ coming from the sector $\chi_{1,1}$ for a triangular-lattice strip of width L .

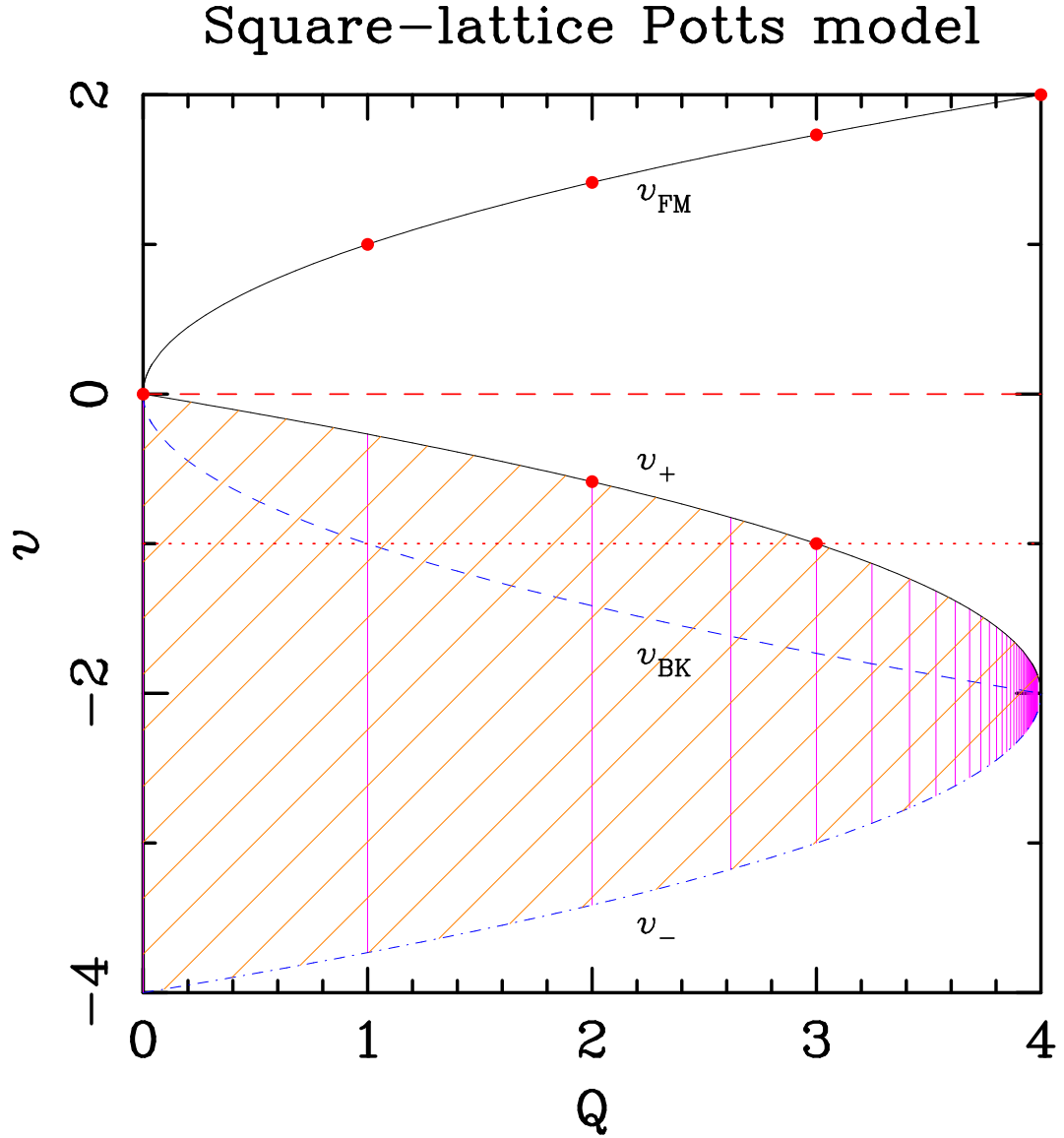


Figure 1: Generic phase diagram for the two-dimensional Potts model in the (Q, v) -plane. The solid black curve in the ferromagnetic ($v > 0$) region shows the standard ferromagnetic phase transition curve $v_{\text{FM}}(Q)$, and the blue dashed curve is its analytic continuation $v_{\text{BK}}(Q)$ into the antiferromagnetic region. This latter curve acts as an RG attractor for the Berker-Kadanoff phase (the orange hatched region). This is separated from the limit of infinite temperature (red dashed curve) by the antiferromagnetic phase-transition curve $v_+(Q)$ (solid black curve in the $v < 0$ region), and from the $v \rightarrow -\infty$ limit by its counterpart $v_-(Q)$ (dot-dashed blue curve). The red horizontal dotted curve represents the zero-temperature antiferromagnet ($v = -1$). The pink vertical lines show the Beraha numbers $Q = 4 \cos^2(\pi/p)$ ($p = 2, 3, \dots$): the phase diagram on these lines is *different* from the generic one shown here and forms the object of the present article. Note that the exact functional forms of the curves $v_{\text{FM}}(Q)$, $v_{\text{BK}}(Q)$, and $v_{\pm}(Q)$ are lattice-dependent; the figure shows their explicit forms for the square-lattice model.

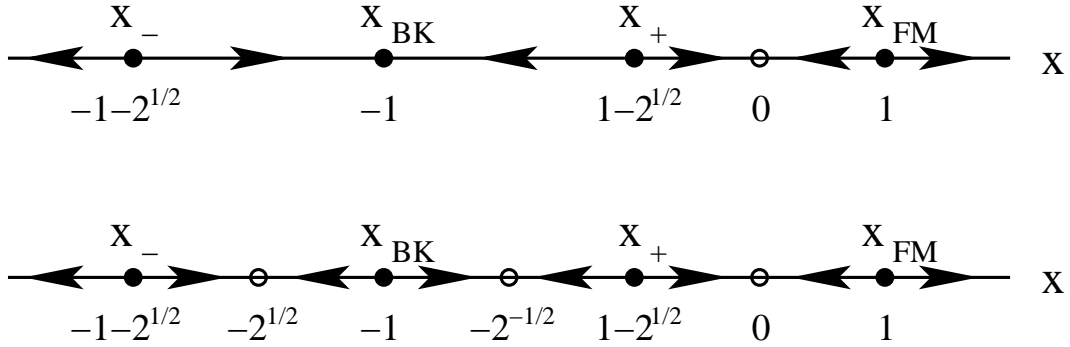


Figure 2: Phase diagram and RG flows for the $Q \rightarrow 2$ state model (top) and the $Q = 2$ Ising model (bottom), on the real x -axis. Filled (resp. empty) circles correspond to critical (resp. non-critical) fixed points.

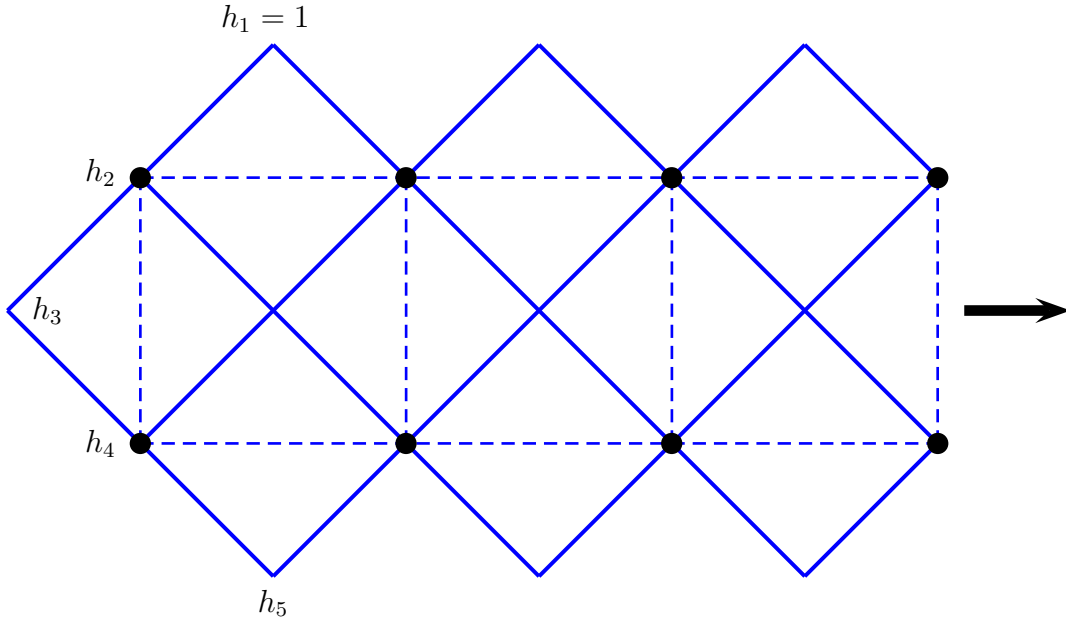


Figure 3: RSOS lattice (solid thick lines) and label convention for the basis in the height space for a square-lattice of width $L = 2$ (dashed thinner lines). The thick black arrow shows the transfer direction (to the right).

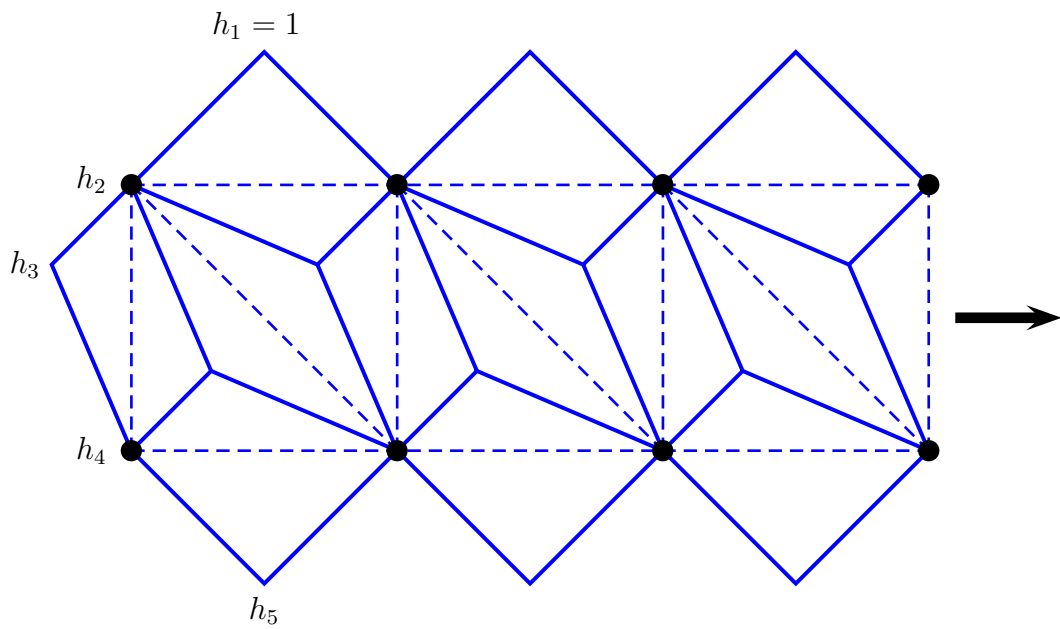


Figure 4: RSOS lattice (solid thick lines) and label convention for the basis in the height space for a triangular-lattice of width $L = 2$ (dashed thinner lines). The thick black arrow shows the transfer direction (to the right).

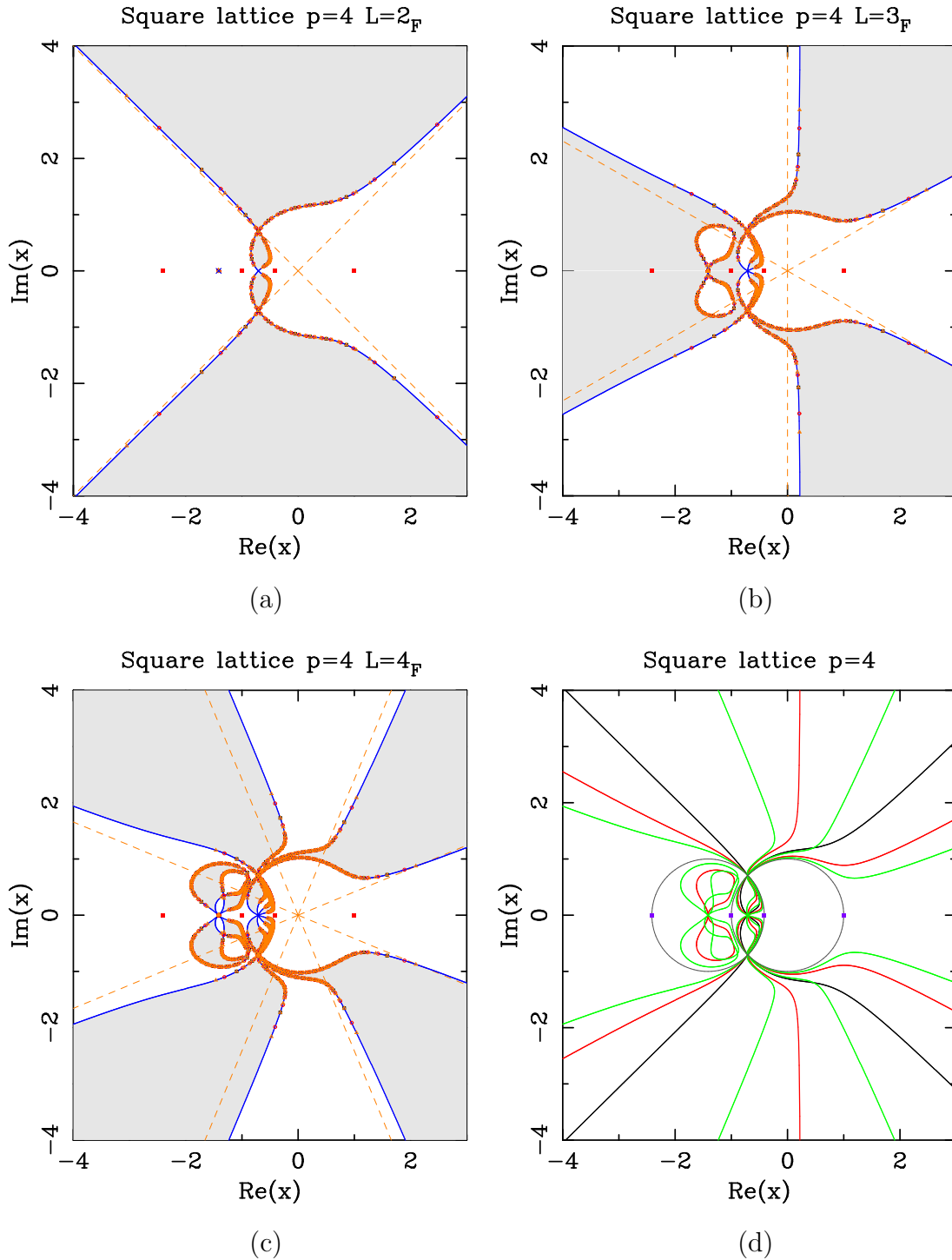


Figure 5: Limiting curves for the square-lattice RSOS model with $p = 4$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). For each width L , we also show the partition-function zeros for finite strips of dimensions $L_F \times (10L)_P$ (black \square), $L_F \times (20L)_P$ (red \circ), and $L_F \times (30L)_P$ (brown \triangle). Figure (d) shows all these limiting curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares \blacksquare show the values where Baxter found the free energy. The symbol \times in (a) marks the position of the found isolated limiting point. In the regions displayed in gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). The dark gray circles correspond to (1.5)

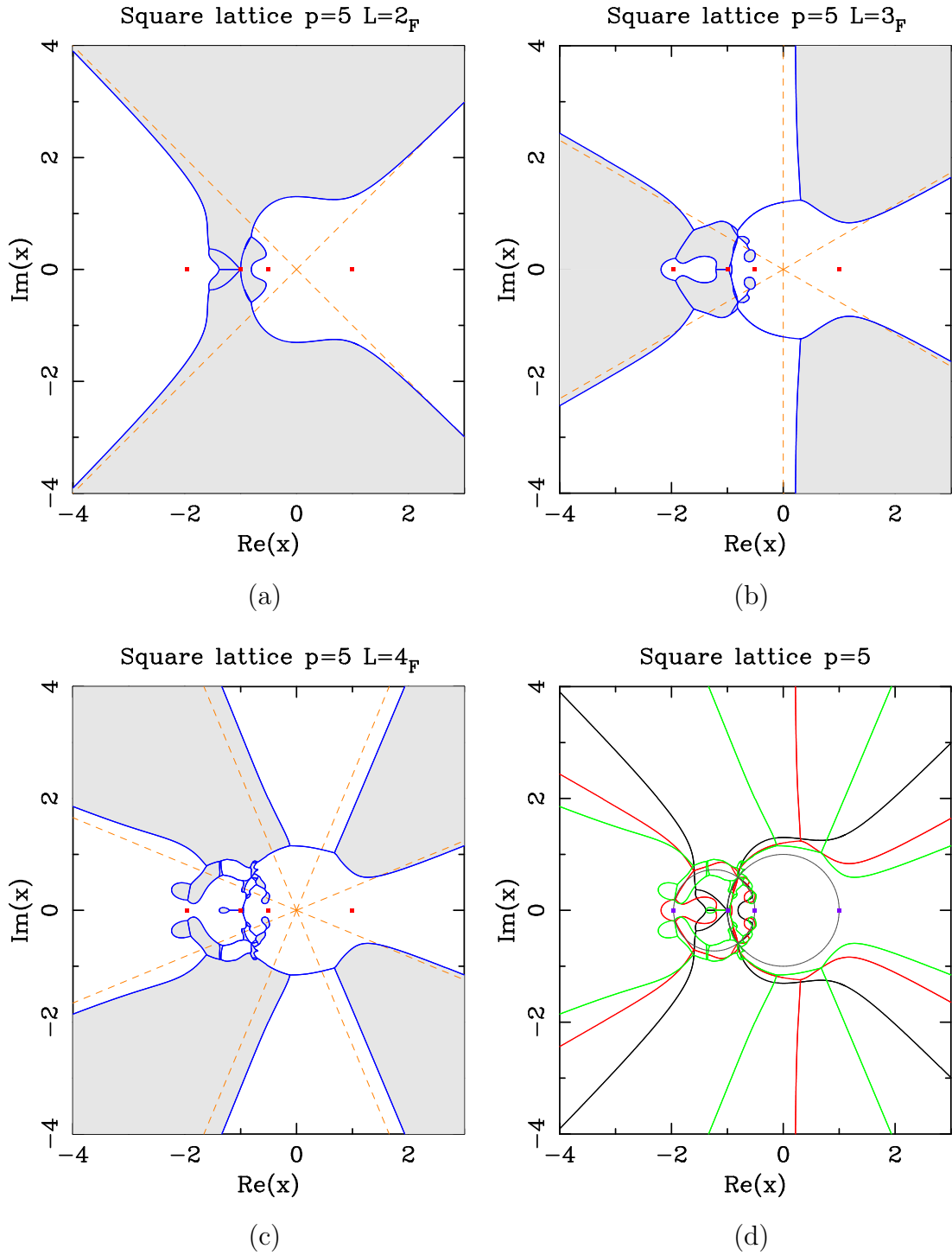


Figure 6: Limiting curves for the square-lattice RSOS model with $p = 5$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares ■ show the values where Baxter found the free energy. In the regions displayed in light gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). The dark gray circles correspond to (1.5)

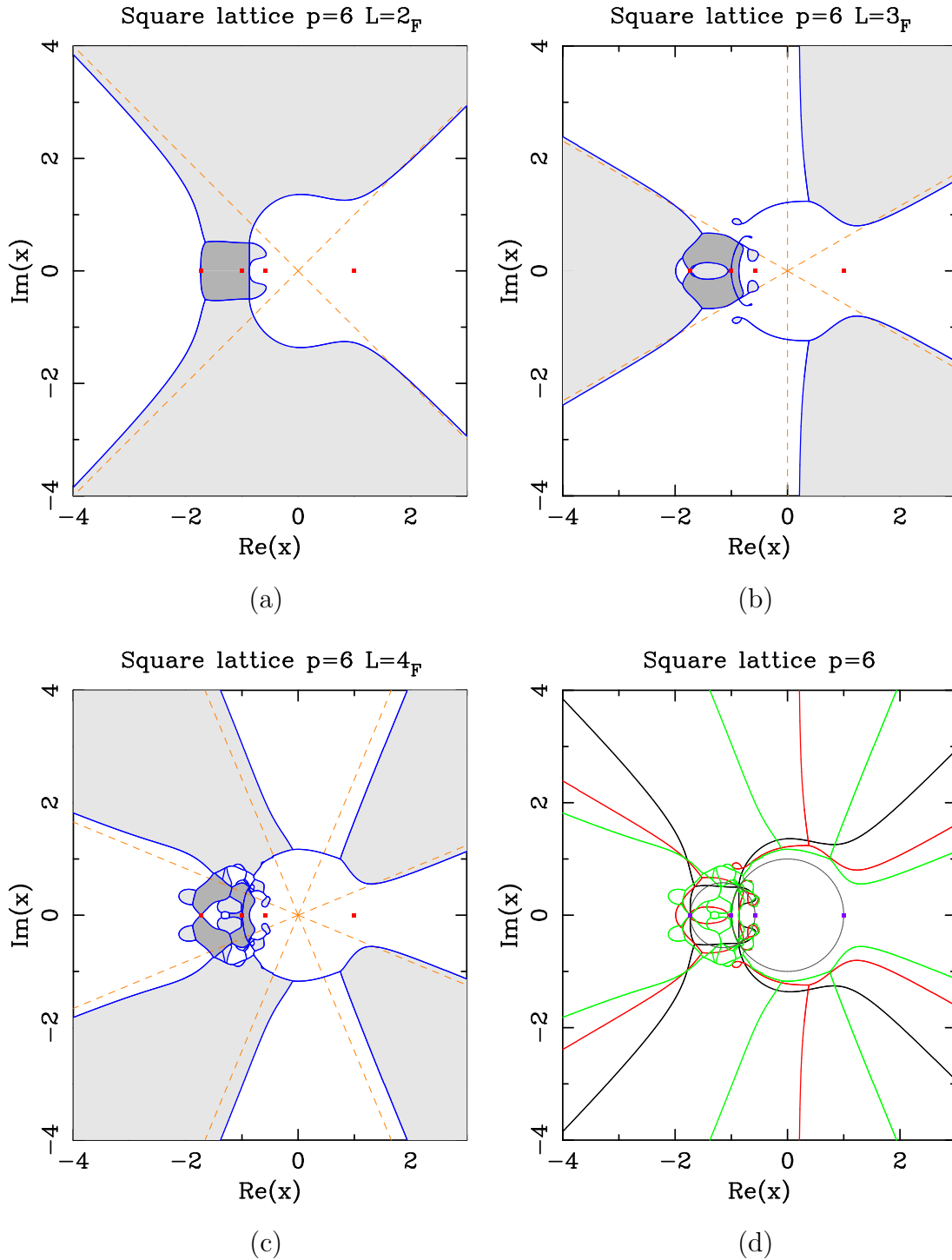


Figure 7: Limiting curves for the square-lattice RSOS model with $p = 6$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares ■ show the values where Baxter found the free energy. In the regions displayed in light gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). In the regions displayed in a darker gray the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$. The dark gray circles correspond to (1.5)

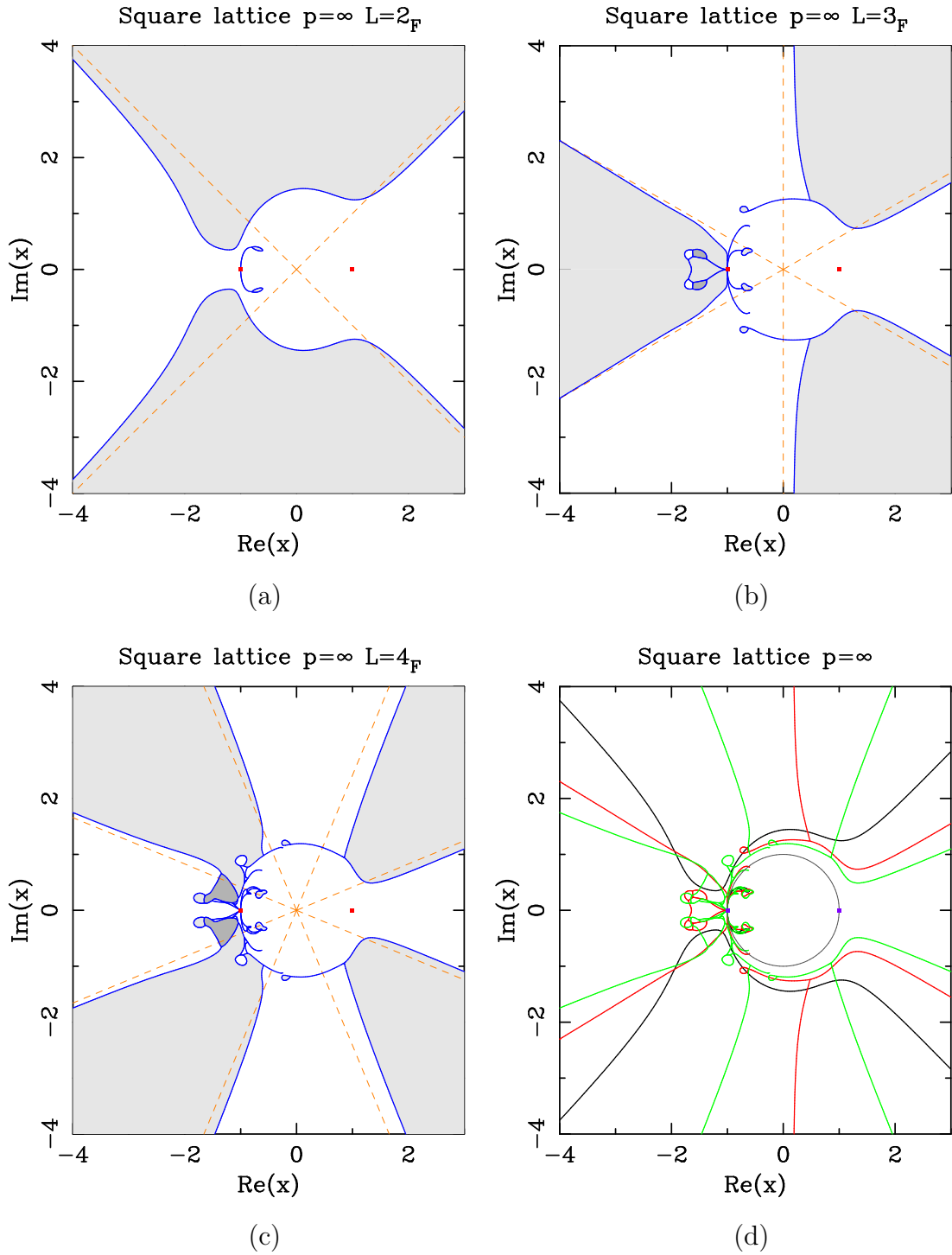


Figure 8: Limiting curves for the square-lattice RSOS model with $p = \infty$ ($Q = 4$) and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares \blacksquare show the values where Baxter found the free energy. In the regions displayed in light gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). In the regions displayed in a darker gray the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$.

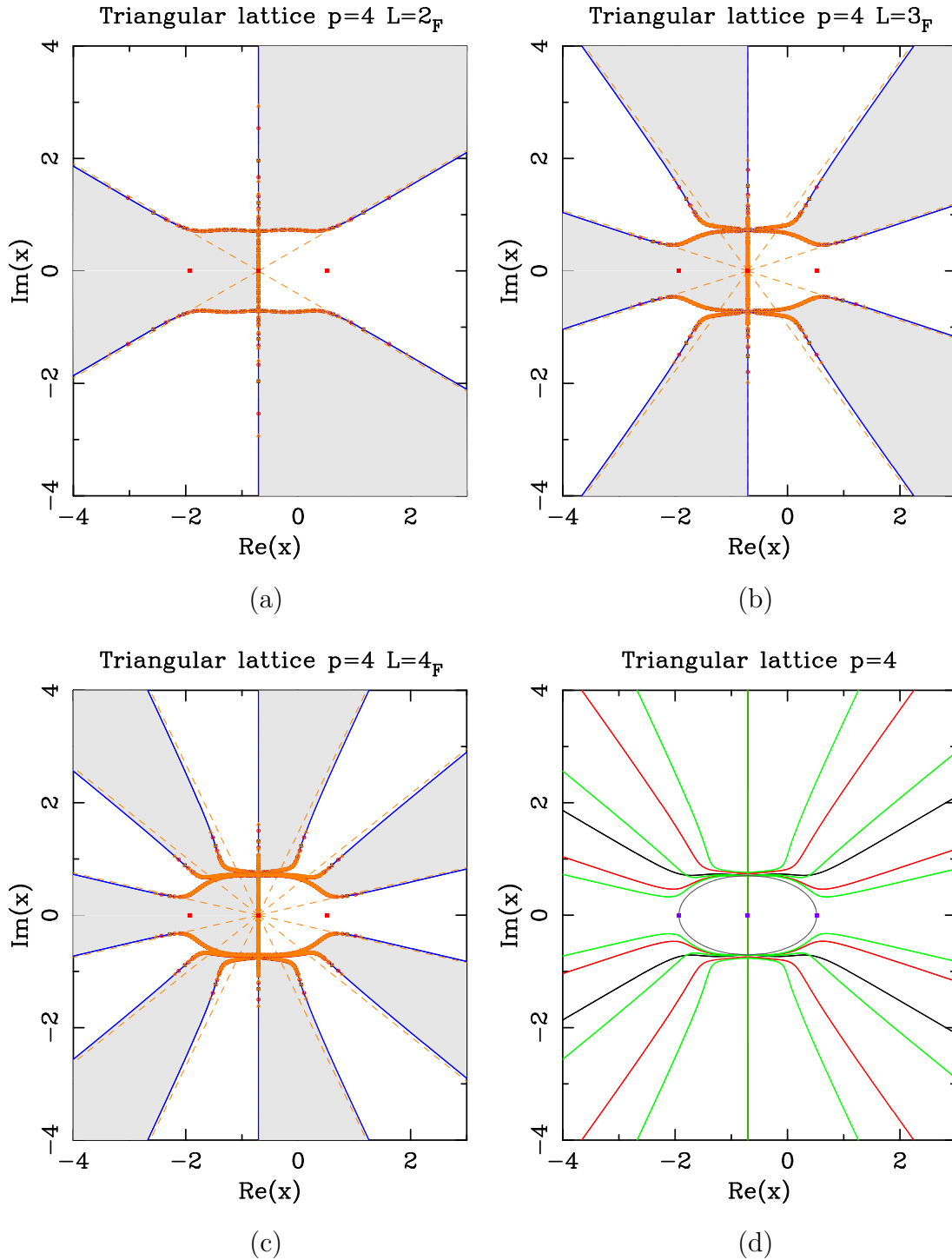


Figure 9: Limiting curves for the triangular-lattice RSOS model with $p = 4$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). For each width L , we also show the partition-function zeros for finite strips of dimensions $L_F \times (10L)_P$ (black \square), $L_F \times (20L)_P$ (red \circ), and $L_F \times (30L)_P$ (brown \triangle). Figure (d) shows all these limiting curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares \blacksquare show the values where Baxter found the free energy. The symbol \times in (a) marks the position of the found isolated limiting point. In the regions displayed in gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). The gray ellipse corresponds to $(\text{Re } x + 1/\sqrt{2})^2 + 3(\text{Im } x)^2 = 3/2$. This curve goes through the points $x = -e^{\pm i\pi/4}$.

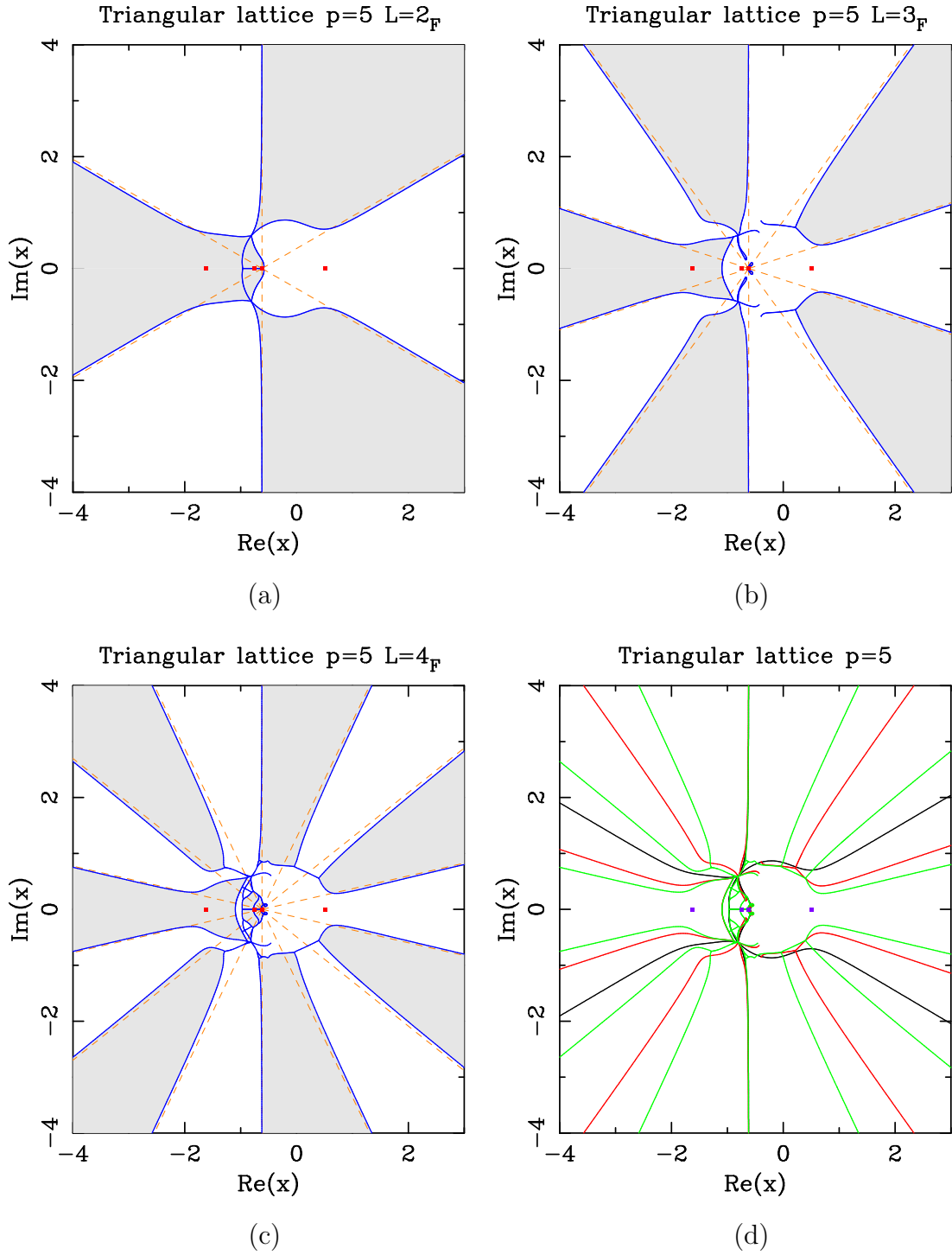


Figure 10: Limiting curves for the RSOS model with $p = 5$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares \blacksquare show the values where Baxter found the free energy. In the regions displayed in light gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$).

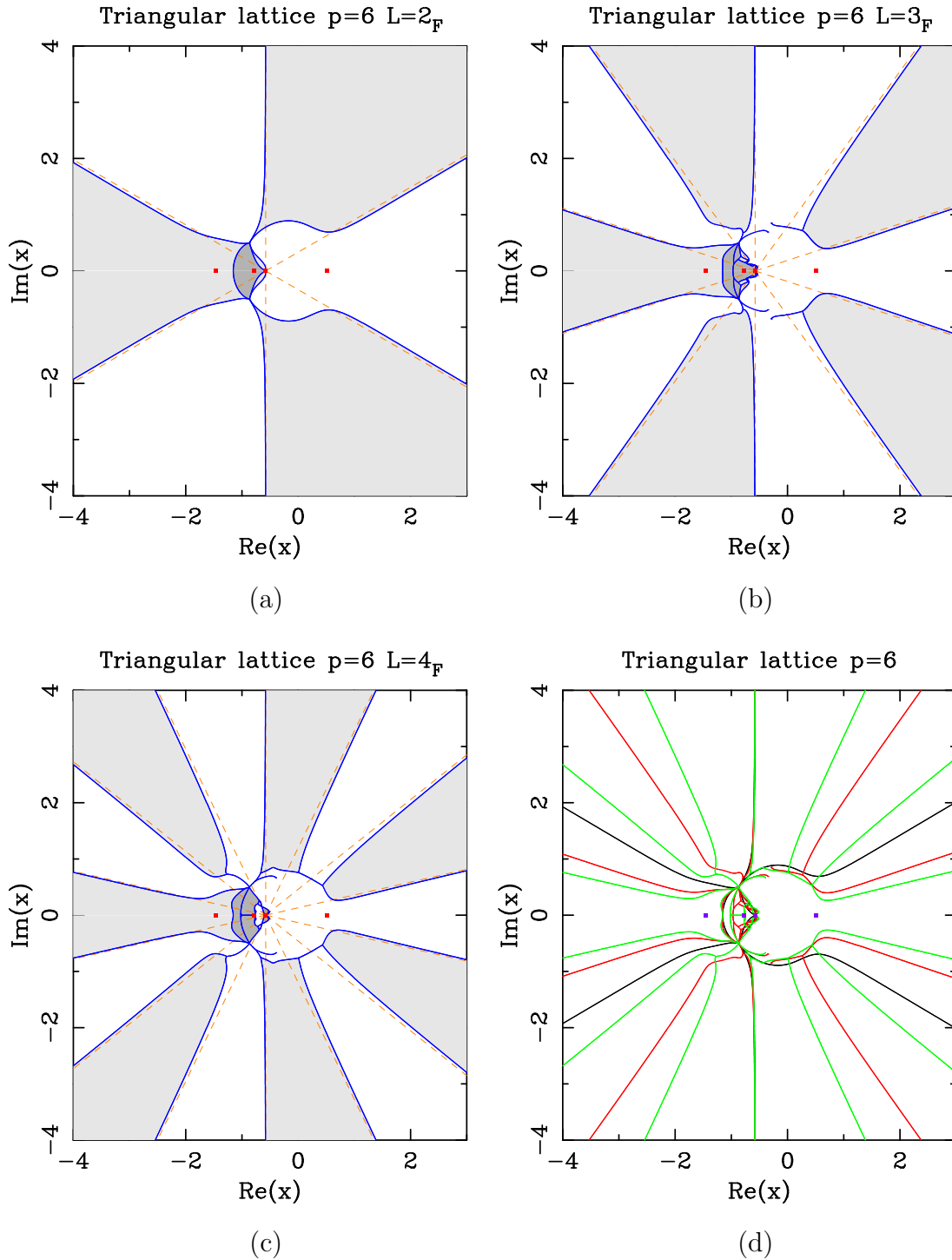


Figure 11: Limiting curves for the triangular-lattice RSOS model with $p = 6$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares ■ show the values where Baxter found the free energy. In the regions displayed in light gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). In the regions displayed in a darker gray the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$.

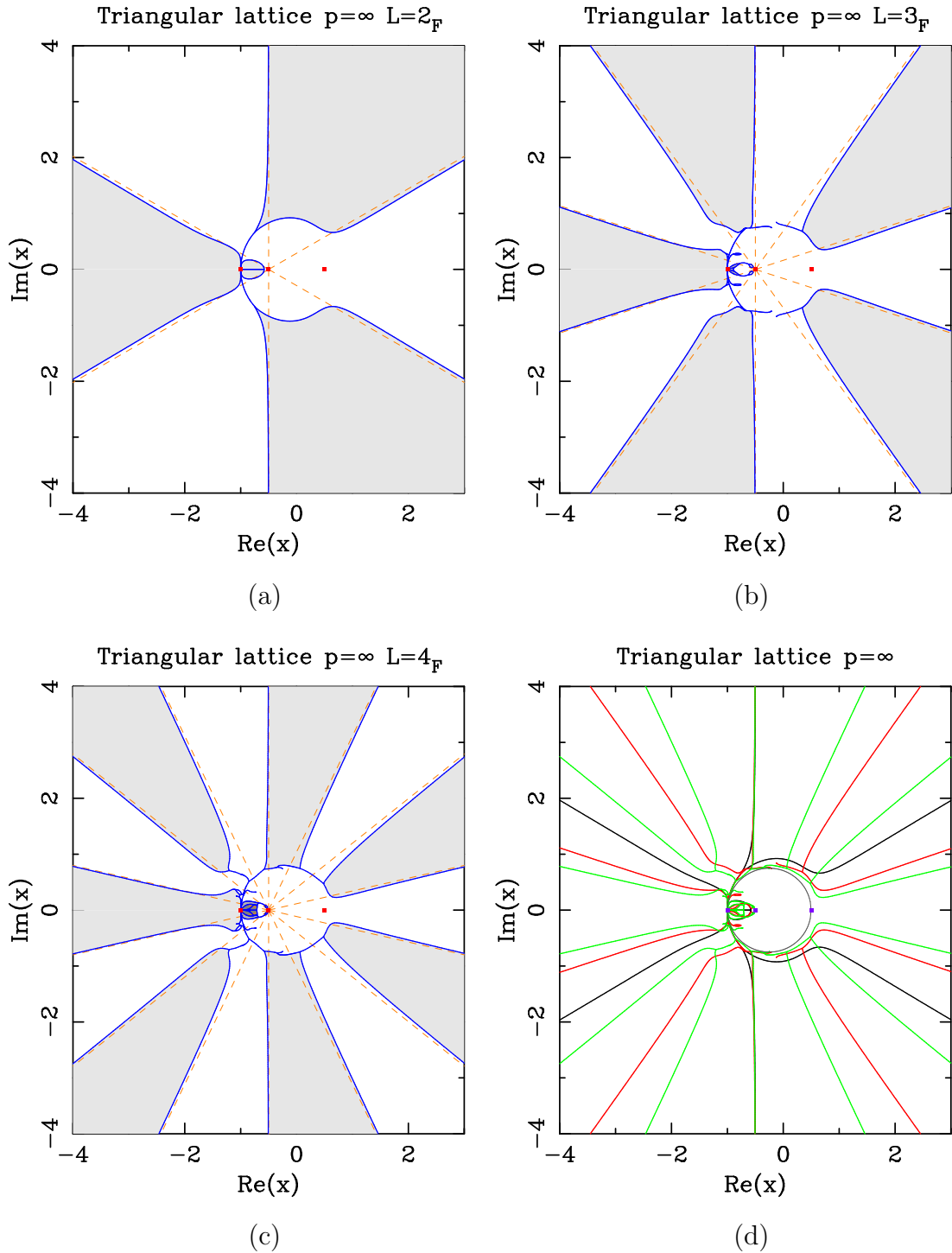


Figure 12: Limiting curves for the triangular-lattice RSOS model with $p = \infty$ ($Q = 4$) and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares \blacksquare show the values where Baxter found the free energy. In the regions displayed in light gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,3}$ (resp. $\chi_{1,1}$). In regions displayed in a darker gray the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$. In (c), an even darker gray marks the regions with a dominant eigenvalue coming from the sector $\chi_{1,7}$. The gray circle corresponds to (7.8).

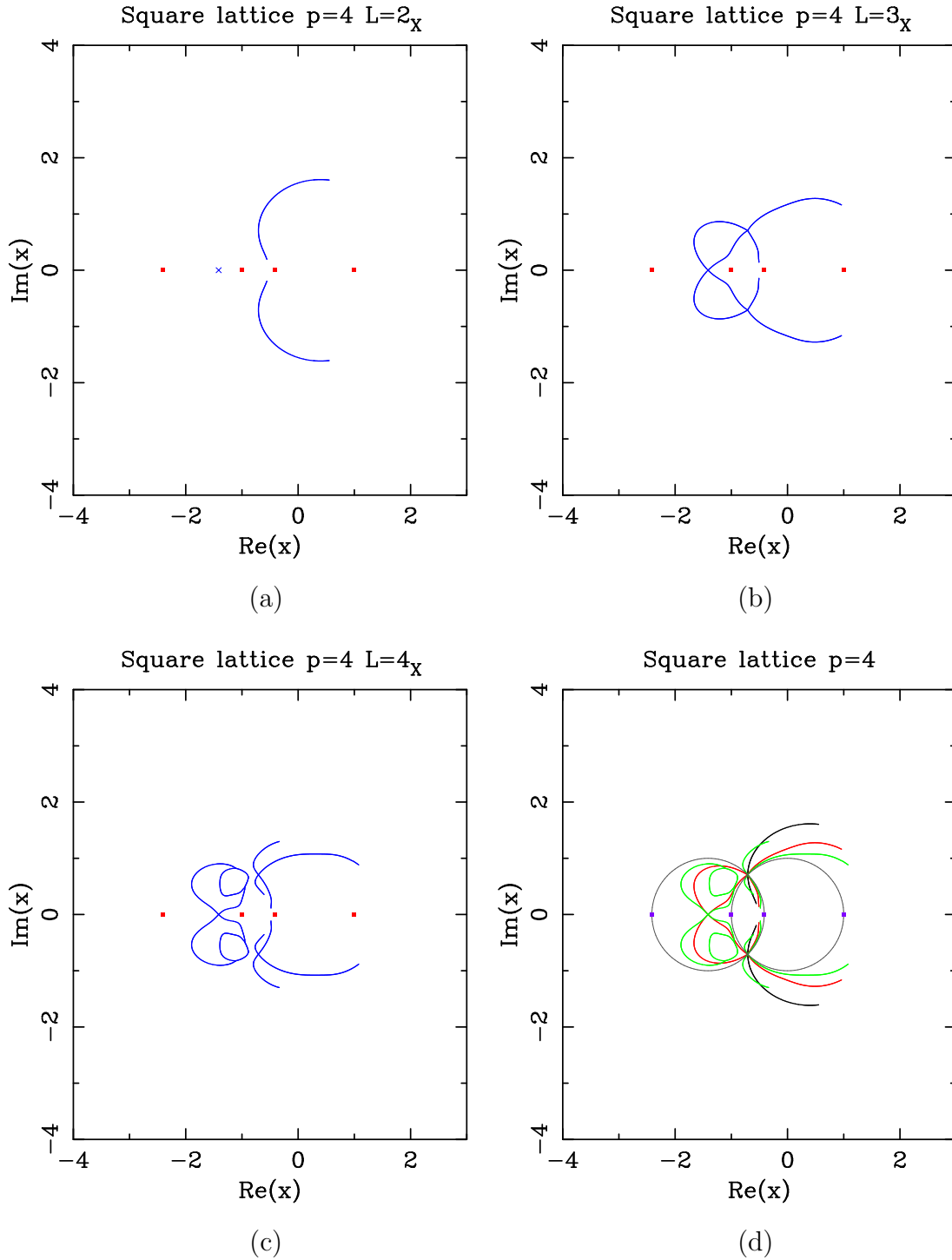


Figure 13: Limiting curves for the square-lattice RSOS model with $p = 4$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c) when only the sector $\chi_{1,1}$ is taken into account. Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares ■ show the values where Baxter found the free energy. The dark gray circles correspond to (1.5)

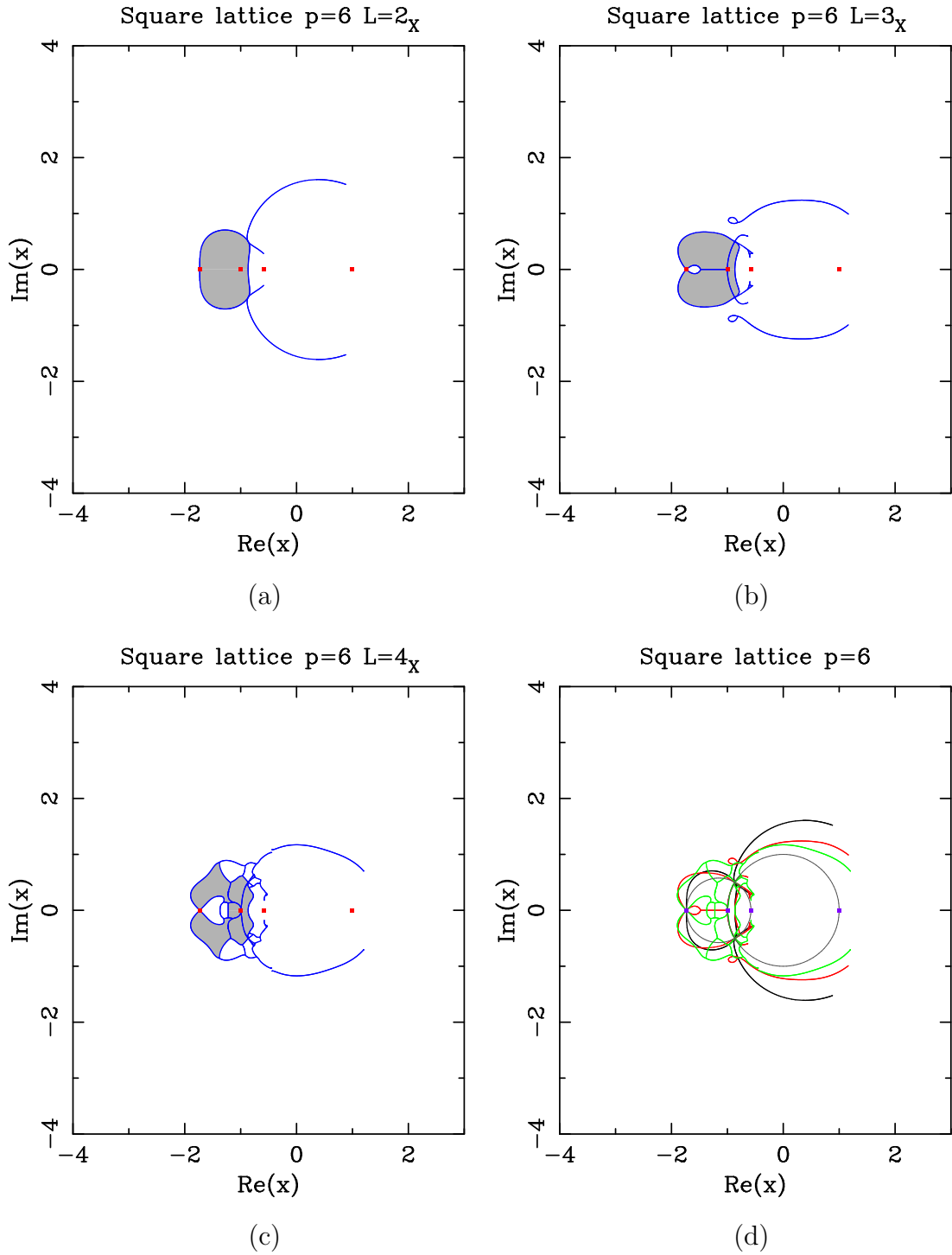


Figure 14: Limiting curves for the square-lattice RSOS model with $p = 6$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c) when only the sectors $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,5}$ are taken into account. In the regions displayed in dark gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$ (resp. $\chi_{1,1}$). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares \blacksquare show the values where Baxter found the free energy. The dark gray circles correspond to (1.5)

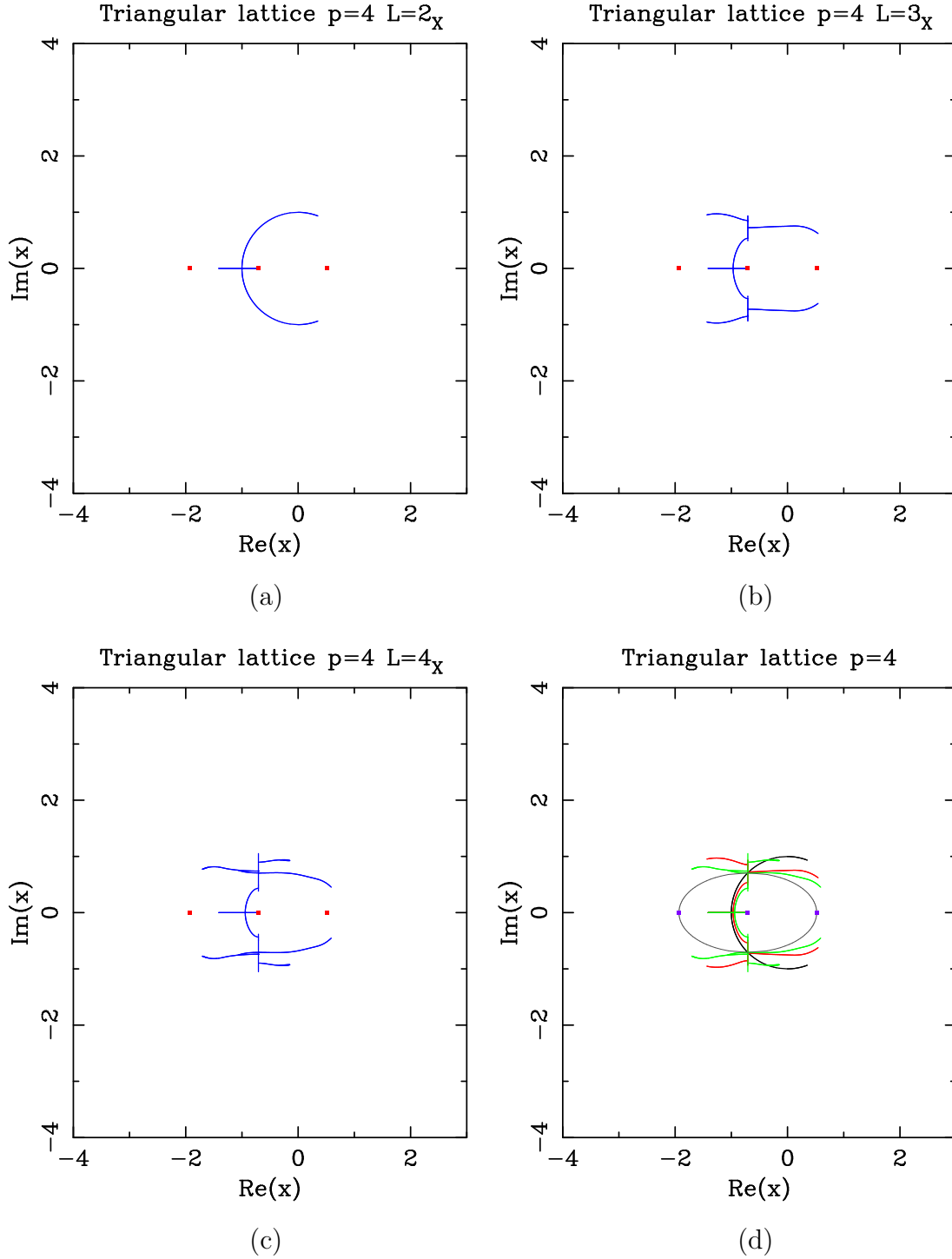


Figure 15: Limiting curves for the triangular-lattice RSOS model with $p = 4$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c) when only the sector $\chi_{1,1}$ is taken into account. Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The gray ellipse corresponds to $(\text{Re } x + 1/\sqrt{2})^2 + 3(\text{Im } x)^2 = 3/2$. This curve goes through the points $x = -e^{\pm i\pi/4}$.

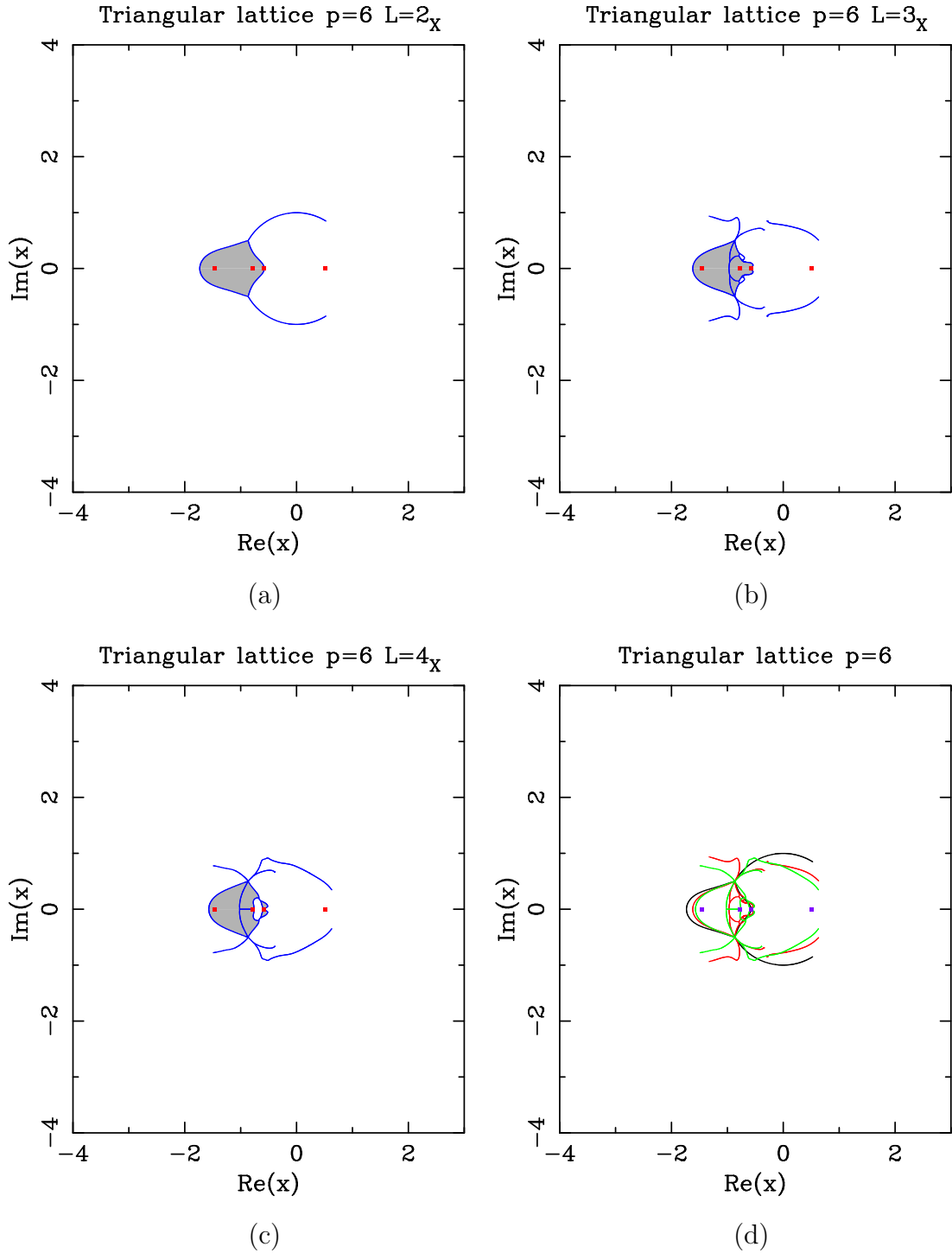


Figure 16: Limiting curves for the triangular-lattice RSOS model with $p = 6$ and several widths: $L = 2$ (a), $L = 3$ (b), and $L = 4$ (c) when only the sectors $\chi_{1,1}$ and $\chi_{1,5}$ are taken into account. In the regions displayed in dark gray (resp. white) the dominant eigenvalue comes from the sector $\chi_{1,5}$ (resp. $\chi_{1,1}$). Figure (d) shows all these curves together: $L = 2$ (black), $L = 3$ (red), $L = 4$ (green). The solid squares ■ show the values where Baxter found the free energy.

Character decomposition of Potts model partition functions.

I. Cyclic geometry

Jean-François Richard^{1,2} and Jesper Lykke Jacobsen^{1,3}

¹*Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques
Université Paris-Sud, Bât. 100, 91405 Orsay, France*

²*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies
Université Paris VI, Boîte 126, Tour 24, 5^{ème} étage
4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

³*Service de Physique Théorique
CEA Saclay, Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette, France*

August 24, 2006

Abstract

We study the Potts model (defined geometrically in the cluster picture) on finite two-dimensional lattices of size $L \times N$, with boundary conditions that are free in the L -direction and periodic in the N -direction. The decomposition of the partition function in terms of the characters K_{1+2l} (with $l = 0, 1, \dots, L$) has previously been studied using various approaches (quantum groups, combinatorics, transfer matrices). We first show that the K_{1+2l} thus defined actually coincide, and can be written as traces of suitable transfer matrices in the cluster picture. We then proceed to similarly decompose constrained partition functions in which exactly j clusters are non-contractible with respect to the periodic lattice direction, and a partition function with fixed transverse boundary conditions.

1 Introduction

The Q -state Potts model on a graph $G = (V, E)$ is defined initially for Q integer by the partition function

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[J \sum_{(i,j) \in E} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right], \quad (1.1)$$

where the spins $\sigma_i = 1, 2, \dots, Q$ live on the vertices V , and the interaction of strength J is along the edges E . This definition can be extended to arbitrary real values of Q through the high-temperature expansion of Z , yielding [1]

$$Z = \sum_{E' \subseteq E} Q^{n(E')} (e^J - 1)^{b(E')}, \quad (1.2)$$

where $n(E')$ and $b(E') = |E'|$ are respectively the number of connected components (clusters) and the cardinality (number of links) of the edge subsets E' .

It is standard to introduce the temperature parameters $v = e^J - 1$ and $x = Q^{-1/2}v$, and to parametrize the interval $Q \in [0, 4)$ by $Q^{1/2} = 2 \cos(\pi/p) = q + q^{-1}$ with $p \geq 2$ and $q = \exp(i\pi/p)$.

In two dimensions, much knowledge about the continuum-limit behaviour of the Potts model has accumulated over the years, thanks mainly to the progress made in conformal field theory and the theory of integrable systems. This is particularly true at the ferromagnetic critical point, whereas much work remains to be done in the more difficult antiferromagnetic regime.

In this paper, we shall take a different point of view, and consider a number of combinatorial results which hold exactly true on arbitrary regular lattices of any finite size $L \times N$, and at any temperature x . The choice of boundary conditions is clearly important. In the following we shall consider the *cyclic* case (free boundary conditions in the L -direction and periodic in the N -direction), and relegate the more complicated *toroidal* case (periodic boundary conditions in both directions) to a companion paper [2].

For simplicity we denote henceforth V the number of vertices, E the total number of edges, and F the number of faces, including the exterior one. Also, we often consider the

lattice as being built up by a transfer matrix T propagating in the N -direction, which we represent as horizontal.

The case of cyclic boundary conditions has already been considered by Pasquier and Saleur [3], where it was shown how to decompose Z as a linear combination of characters $K_{1,2l+1}$ (with $l = 0, 1, \dots, L$) of representations of the quantum group $U_q(sl(2))$. Further developments were made independently in [4, 5]. Chang and Shrock [4] recovered the same decomposition, but with $K_{1,2l+1}$ defined as a partial trace of the transfer matrix T_{spin} in the spin representation. Jacobsen and Salas [5] used a similar decomposition, but with $K_{1,2l+1}$ defined as a matrix element of a transfer matrix in the cluster representation involving two time-slices. We show here that all three points of view are in fact equivalent, and that the characters $K_{1,2l+1}$ obtained are identical.

Apart from that, the main part of our discussion is in the cluster picture, following [5]. We recall the relevant definitions in section 2.

The cluster configurations contributing to $K_{1,2l+1}$ turn out to be those in which $j \geq l$ clusters are non-contractible with respect to the periodic lattice direction. We henceforth refer to such clusters as *non-trivial clusters*, or NTC for brevity. In section 3 we give the character decomposition of constrained partition functions Z_{2j+1} in which the number of NTC is precisely j . This gives as a by-product the character decomposition of the full partition function Z , in agreement with [3, 4].

Finally, we obtain in section 4 the character decomposition of a partition function with *fixed* (rather than free) transverse boundary conditions. The physical implications of our results are discussed in section 5.

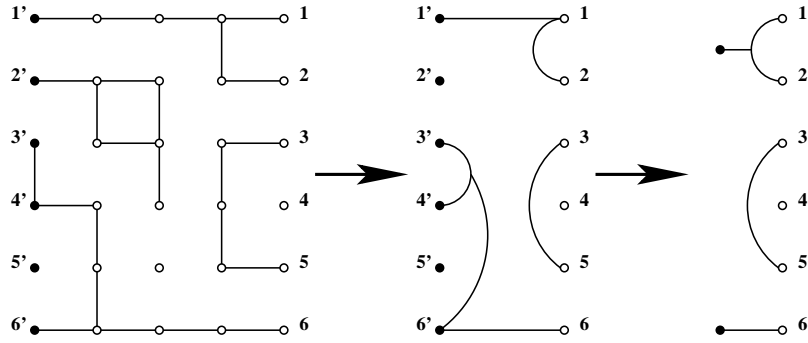


Figure 1: Example of a cluster configuration on a part of the square lattice with width $L = 6$ (left part) and the corresponding connectivity state involving two time slices (middle part). The points in the right (resp. left) time slice are represented as white (resp. black) circles and are labelled $1, 2, \dots, L$ (resp. $1', 2', \dots, L'$). The corresponding partition is $|v_P\rangle = (1'12)(2')(3'4'6'6)(5')(35)(4)$. There are two bridges, i.e., independent connections between the left and right time slices. With the number of bridges given, the transfer matrix elements are independent of the connectivity information on the left time slice. This fact can be expressed graphically by assigning to each bridge an unlabelled black point and depicting the right time slice only (right part of the figure).

2 Cluster representation of the Potts model

2.1 Transfer matrix in the cluster representation

The cluster representation of the Potts model is defined by Eq. (1.2). Since the clusters are non-local objects, it is not a priori obvious how to build the partition function using a transfer matrix. The key to tackle the problem of non-locality is to introduce a basis of states that takes into account connectivity information [6]. However, the periodic boundary conditions in the longitudinal direction introduces a further complication, whose resolution necessitates to introduce a transfer matrix that acts between *two* time slices [5].

We therefore begin by reviewing how to write the transfer matrix T in the cluster representation when the boundary conditions are cyclic [5]. The relevant geometry is

shown in the left part of Fig. 1.¹ Unlike the case of free boundary conditions in the longitudinal direction, one must take care not only of the connectivities inside the right time slice (at time $t = t_0$), i.e., between the points labelled $\{1, 2, \dots, L\}$, but also of the connectivities of the left time slice (at time $t = 0$), i.e., between the points $\{1', 2', \dots, L'\}$, and of the connectivities linking the two time slices. The transfer matrix propagates the right time slice from time t_0 to time $t_0 + 1$. Therefore, the space on which the transfer matrix acts is the space of connectivity patterns $|v_P\rangle$ associated to partitions of the set $\{1', \dots, L', L, \dots, 1\}$. Because of the planarity of the lattice only non-crossing partitions are allowed. An example of an allowed partition and its graphical representation is shown in the middle part of Fig. 1.

A formal expression of the transfer matrix is given in [5]. Here we just give the practical rules to calculate its elements. As in the case of free longitudinal boundary conditions, there is a weight v per coloured link and a weight Q per cluster [see Eq. (1.2)], except for the clusters containing a black circle which have a weight equal to 1. Of particular interest are the components of a partition that contain both white and black circles. Such components are called bridges; we denote by l the total number of bridges in the partition (in Fig. 1, $l = 2$). When at a time t , i.e., after applying t times the transfer matrix, one obtains a state with l bridges, it means that there are l clusters which begin at $t = 0$ and end at a time $\geq t$. Note that the initial connectivity (at $t = 0$) is the unique state with L bridges, meaning that the left and right time slices coincide. Denoting this state $|v_L\rangle$, the partition function Z is given by

$$Z = \langle u | T^N | v_L \rangle, \quad (2.1)$$

where $\langle u |$ takes into account the periodic longitudinal boundary conditions, by re-identifying the left and right time slices at time $t = N$ and assigning a weight Q to each of the resulting clusters [5].

Two important observations must be made:

¹Here, and in all subsequent figures, the explicit examples of configurations are for the geometry of the square lattice. We however stress that our reasoning is quite general and applies to an arbitrary lattice which is weakly regular, in the sense that the number of points in each time slice is equal to L .

1. T propagates the right time slice, and so, cannot modify the connectivity inside the left time slice.
2. Under the action of T , the number of bridges l can only decrease or stay constant.

These two properties imply that the transfer matrix has a lower-triangular block form:

$$T = \begin{pmatrix} T_{L,L} & 0 & \dots & 0 \\ T_{L-1,L} & T_{L-1,L-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{0,L} & T_{0,L-1} & \dots & T_{0,0} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Furthermore, they also imply that each block $T_{l,l}$ on the diagonal of T has itself a diagonal block form:

$$T_{l,l} = \begin{pmatrix} T_{l,l}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{l,l}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{l,l}^{(N_l)} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Each sub-block $T_{l,l}^{(j)}$ is characterized by a certain left slice connectivity and a position of the l bridges. Its dimension is given by the number of compatible right slice connectivities. In fact, the N_l sub-blocks $T_{l,l}^{(j)}$, with $1 \leq j \leq N_l$, are exactly equal, as the rules for computing their matrix elements coincide. Indeed, the L white circles of the right slice do not “see” the left slice connectivity and from where the l bridges emanate; only the number l of bridges matters. In particular, the dimension $n(L, l)$ of the sub-block $T_{l,l}^{(j)}$ is independent of j . Moreover, because of the symmetry between the left and right time slices, the number of sub-blocks equals their dimension, $N_l = n(L, l)$. It can be proved that [3, 4]:

$$n(L, l) = \frac{2l+1}{L+l+1} \binom{2L}{L-l} = \binom{2L}{L-l} - \binom{2L}{L-l-1}. \quad (2.4)$$

Note that $n(L, 0) = C_L$, the L 'th Catalan number, which is the dimension of the cluster transfer matrix with *free* longitudinal boundary conditions. Indeed, each sub-block $T_{0,0}^{(j)}$ is equal to the usual single time slice cluster transfer matrix [6].²

²Note that the last part of these results differ from those given in [5]. Namely, the authors of [5] studied

Because of the block structure of T , its eigenvalues are the union of the eigenvalues of the sub-blocks $T_{l,l}^{(j)}$. Therefore, the sub-blocks with given l being equal, one can obtain all the eigenvalues of T by considering only one reference sub-block for each given number of bridges l [5]. For instance, one can choose as reference sub-block the one with no connection between black circles and with l bridges beginning at $\{1', 2', \dots, l'\}$. Alternatively, one may forget the labelling of the left time slice altogether, and simply mark by a black point each of the components of the right-slice connectivity which form part of a bridge.³ This latter choice is represented in the right part of Fig. 1. In the following, we denote the reference sub-block simply T_l .

2.2 Definition of the characters $K_{1,2l+1}$

It follows from Eq. (2.1) and the preceding discussion that

$$Z = \sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^{n(L,l)} c(L, l, i, x) [\lambda_{l,i}(L, x)]^N, \quad (2.5)$$

where a priori the amplitudes c of the eigenvalues $\lambda_{l,i}(L, x)$ (i labels the distinct eigenvalues within the sub-block T_l) depend of the width L , the number of bridges l , the label i , and the temperature x . In fact, it has been proved in [3,4], and used in [5], that c depend only of l (and the value of Q chosen). We therefore denote them $c^{(l)}$ in the following.

the chromatic polynomial ($v = -1$), so the connectivities between neighbouring points were forbidden, and therefore the dimension of each sub-block was smaller than $n(l, L)$ given by Eq. (2.4). Furthermore, in the case of a square lattice, the authors symmetrized T with respect to a top-bottom reflection of the strip. This not only diminishes the total dimension of the transfer matrix, but also the number of sub-blocks. At the same time it makes the structure of T slightly more complicated. Indeed, there would then be two types of sub-blocks, depending on whether the left slice connectivity and the position of the l bridges are symmetric or non-symmetric with respect to the reflection. The symmetrization couples either pairs of non-symmetric sub-blocks, or pairs of states inside a symmetric sub-block. Therefore, the symmetric and non-symmetric sub-blocks have different dimensions, the non-symmetric sub-blocks having the largest dimension $n(L, l)$.

³Note that this choice must respect planarity: only the unnnested connectivity components (i.e., those accessible from the far left) can be marked by a black point.

Thus,

$$Z = \sum_{l=0}^L c^{(l)} K_{1,2l+1}(L, N, x), \quad (2.6)$$

where the $K_{1,2l+1}(L, N, x)$ are defined as

$$K_{1,2l+1}(L, N, x) = \sum_{i=1}^{n(L,l)} [\lambda_{l,i}(L, x)]^N. \quad (2.7)$$

$K_{1,2l+1}$ is thus simply equal to $\text{Tr}(T_l)^N$.

The notation $K_{1,2l+1}$ (instead of just K_l) is motivated by the fact that at the ferromagnetic critical point ($x_c = 1$ for the square lattice), and in the continuum limit, these quantities become special cases of a generic character $K_{r,s}$ of conformal field theory (CFT) [3]. More precisely, the character $K_{r,s}$ corresponds to the holomorphic dimension $h_{1,2l+1}$ of the CFT with central charge $c = 1 - \frac{6}{p(p-1)}$. For generic (irrational) values of p this CFT is non-unitary and non-minimal. We shall comment on the case of p integer later, in section 3.4. We stress that we have here defined $K_{1,2l+1}$ combinatorially for an $L \times N$ system, at any temperature x , with no continuum limit being taken; we shall nevertheless refer to them as characters.

The amplitudes $c^{(l)}$ appearing in Eq. (2.6) are q -deformed numbers [3, 4]

$$c^{(l)} = (2l+1)_q = \frac{\sin(\pi(2l+1)/p)}{\sin(\pi/p)} = \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q^j. \quad (2.8)$$

Note that $c^{(l)}$ is a polynomial of degree l in Q . In the next section, we obtain a new proof of Eq. (2.8), as a by-product of a more general result in which we give a combinatorial sense to each term in the polynomial separately.

In the remainder of the article, we shall decompose various partition functions as linear combinations of the characters $K_{1,2l+1}$. Indeed, the $K_{1,2l+1}$ are simply related to the eigenvalues of the transfer matrix and can be considered as the basis building blocks of various restricted partition functions.

2.3 Equivalence with Chang and Shrock

We now show that the $K_{1,2l+1}$, that we have defined above following [5], coincide with the partial traces defined in [4].

In [4], Chang and Shrock considered the Potts model partition function in the spin representation: writing $Z = \text{Tr}(T_{\text{spin}})^N$ they decomposed the spin space as a direct sum of what they called level l subspaces. By definition, the level l subspace corresponds to the space generated by applying T_{spin} to the sum of spin states with l spins fixed to l given values. The restriction of T_{spin} to the level l subspace is exactly equal to our matrix T_l (with l connectivity components marked by black points), as they have the same calculation rules (marking a cluster with a black point corresponds to fixing its spin state, i.e., to giving it a weight 1 instead of Q) and a very similar graphical representation of the states (resembling the right part of Fig. 1). The character $K_{1,2l+1}$ appears therefore in [5] as the restriction of the trace to the level l subspace.

We remark that the physical interpretation of the amplitudes $c^{(l)}$ made in [4] is somewhat different from ours. Indeed, at level l Chang and Shrock considered all the independent possibilities of attributing values to l fixed spins, taking into account that some of those possibilities were already present at lower levels. Accordingly, they interpreted $c^{(l)}$ as the number of level l states independent among themselves, and independent of states at lower levels, and computed $c^{(l)}$ diagrammatically.

Proving the equivalence of our $K_{1,2l+1}$ with those of Pasquier and Saleur requires some further background material, and is deferred to section 3.3.

3 Partition function with a fixed number of non-trivial clusters

In this section we study the character decomposition of constrained partition functions Z_{2j+1} in which the number of non-trivial clusters (NTC) is fixed to j , for $j =$

$0, 1, \dots, L$. It is important to notice that this is different from the characters $K_{1,2l+1}$, which are related to blocks of the transfer matrix with l bridges.⁴ When imposing the periodic longitudinal boundary conditions, each bridge becomes essentially a *marked* NTC. Since $K_{1,2l+1}$ may contain further NTC which are not marked, we expect $K_{1,2l+1}$ to be a linear combination of several Z_{2j+1} with $j \geq l$. Conversely, since upon acting with the transfer matrix the number of bridges can only decrease or stay constant, we also expect Z_{2j+1} to be a linear combination of several $K_{1,2l+1}$ with $l \geq j$.

The primary goal of this section is to obtain the character decomposition of Z_{2j+1} . In the following two subsections we therefore first express the $K_{1,2l+1}$ in terms of the Z_{2j+1} , and then invert the resulting relations.

3.1 $K_{1,2l+1}$ in terms of Z_{2j+1}

Recalling that $K_{1,2l+1} = \text{Tr}(\mathbf{T}_l)^N$, we can write

$$K_{1,2l+1} = \sum_{i=1}^{n(L,l)} \langle v_{l,i} | \mathbf{T}^N | v_{l,i} \rangle, \quad (3.1)$$

where the $|v_{l,i}\rangle$ are the $n(L,l)$ possible connectivity states with l bridges, i.e., states such as those shown in the right part of Fig. 1 with l black points.

We first show that a given cluster configuration with j NTC is contained $n(j,l)$ times in $K_{1,2l+1}$. To this end, we define that a connectivity state $|v_{l,i}\rangle$ is *compatible* with a given cluster configuration if the action of the cluster configuration on $|v_{l,i}\rangle$ (in the sense of a transfer matrix acting towards the right) yields the same connectivity $|v_{l,i}\rangle$. An example is shown in Fig. 2. It is useful to “forget” for a moment that the longitudinal boundary conditions are cyclic, i.e., to consider the leftmost and rightmost columns of the lattice as distinct. Indeed, the periodic boundary conditions are already encoded in the fact that the final and initial states in Eq. (3.1) must coincide. The goal is then to show that any cluster configuration with j NTC is compatible with precisely $n(j,l)$ different

⁴To avoid confusion, j will from now on always denote the number of NTC in Z_{2j+1} , and l will denote the number of bridges in $K_{1,2l+1}$.

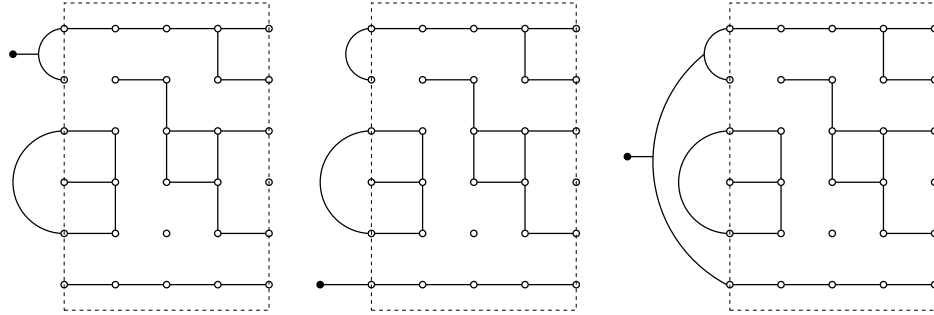


Figure 2: A cluster configuration on a portion of the square lattice (shown inside a dashed box for clarity) and the three compatible connectivity states (shown on the left of each copy of the cluster configuration). In each of the three cases, the final connectivity (i.e., the way in which the L points on the rightmost column of the lattice are interconnected and marked by black points through the cluster configuration *and* the connectivity state on the left) is equal to the initial connectivity state.

connectivity states.

Consider then a given cluster configuration with j NTC, with the k 'th NTC ($k = 1, 2, \dots, j$) connecting onto the points $\{y_k\}$ of the rightmost column. For example, in Fig. 2 we have $\{y_1\} = \{1, 2\}$ and $\{y_2\} = \{6\}$. The connectivity states $|v_{l,i}\rangle$ compatible with the cluster configuration can be constructed as follows:

1. The connectivities of the points $y \notin \cup_{k=1}^j \{y_k\}$ must be connected in the same way in $|v_{l,i}\rangle$ as in the cluster configuration. For instance, in Fig. 2 the points $y = 3, 5$ must be connected.
2. The points $\{y_k\}$ within the same bridge (for example, $y = 1, 2$ in Fig. 2) must be connected in $|v_{l,i}\rangle$.
3. One can independently choose to associate or not a black point to each of the sets $\{y_k\}$. One is free to connect or not two distinct sets $\{y_k\}$ and $\{y_{k'}\}$.

Clearly, the rules 1 and 2 leave no choice. The rule 3 implies in particular that $j \geq l$, or else there is no compatible state $|v_{l,i}\rangle$. The choices mentioned in rule 3 then leave us $n(j, l)$ possibilities for constructing a compatible $|v_{l,i}\rangle$.

We have therefore shown that a given cluster configuration with j NTC is contained $n(j, l)$ times in $K_{1,2l+1}$. As $K_{1,2l+1}$ is simply a trace, each of its NTC carries a weight of 1, whereas the j NTC in Z_{2j+1} each have the usual cluster weight of Q . We therefore arrive at the result

$$K_{1,2l+1} = \sum_{j=l}^L n(j, l) \frac{Z_{2j+1}}{Q^j} \quad (3.2)$$

where we recall that $n(j, l)$ has been defined in Eq. (2.4).

3.2 Z_{2j+1} in terms of $K_{1,2l+1}$

Inverting the relations (3.2) yields

$$Z_{2j+1} = \sum_{l=j}^L c_j^{(l)} K_{1,2l+1} \quad (3.3)$$

with the coefficients $c_j^{(l)}$ given by

$$c_j^{(l)} = (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q^j. \quad (3.4)$$

An interesting special case, which we will refer to in the following, is obtained for $j = 0$, i.e., by disallowing any NTC. From Eqs. (3.3)–(3.4), we obtain an alternating sum of the $K_{1,2l+1}$:

$$Z_1 = \sum_{l=0}^L (-1)^l K_{1,2l+1} \quad (3.5)$$

Note also that the total partition function of the Potts model is given by

$$Z = \sum_{j=0}^L Z_{2j+1}. \quad (3.6)$$

Comparing Eqs. (3.4) and (2.8) we infer that

$$c^{(l)} = \sum_{j=0}^l c_j^{(l)} \quad (3.7)$$

and from Eqs. (3.3) and (3.6) we obtain as promised Eq. (2.6) for the full partition function.

Interestingly, then, the effect of fixing the number of NTC to j is to keep only the term multiplying Q^j in the expression (2.8) of $c^{(l)}$. As $c^{(l)}$ is polynomial of degree l in Q , only the $K_{1,2l+1}$ with $l \geq j$ contribute to the character decomposition of Z_{2j+1} . This is in agreement with the physical argument given at the beginning of section 3.

3.3 Equivalence with Pasquier and Saleur

We can now prove that the $K_{1,2l+1}$ defined in [3] using the six-vertex model are equal to the $K_{1,2l+1}$ we defined in Eq. (2.7) using the cluster transfer matrix. Before attacking the proof, let us briefly recall where the connection with the six-vertex model comes from.

On a planar lattice, the cluster representation of the Potts model partition function is equivalent to a loop representation, where the loops are defined on the medial lattice and surround the clusters [7]. From Eq. (1.2) and the Euler relation, the weight of a loop configuration E' is $Q^{(V+c(E'))/2}x^{b(E')}$, where $c(E')$ is its number of loops.⁵ An oriented loop representation is obtained by independently assigning an orientation to each loop, with weight q (resp. q^{-1}) for counterclockwise (resp. clockwise) loops (recall that $Q^{1/2} = q + q^{-1}$). In this representation one can define the spin S_z along the transfer direction (with parallel/antiparallel loops contributing $\pm 1/2$) which acts as a conserved quantum number. Note that $S_z = l$ means that there are at least l non-contractible loops, i.e., loops that wind around the periodic (N) direction of the lattice. Indeed, the contractible loops do not contribute to S_z .

The weights $q^{\pm 1}$ can be further redistributed locally, as a factor of $q^{\alpha/2\pi}$ for a counterclockwise turn through an angle α [7]. While this redistribution correctly weighs contractible loops, the non-contractible loops are given weight 2, but this can be corrected [3] by twisting the model, i.e., by inserting the operator q^{2S_z} into the trace that defines the partition function. A partial resummation over the oriented-loop splittings at vertices which are compatible with a given orientation of the edges incident to that

⁵Note that we do not factorize $Q^{V/2}$, in order to recover exactly the same expression for the $K_{1,2l+1}$ as before.

vertex now gives a six-vertex model representation [7]. Each edge of the medial lattice then carries an arrow, and these arrows are conserved at the vertices: the net arrow flux defines S_z as before. The six-vertex model again needs twisting by the operator q^{S_z} to ensure the correct weighting. Considering each arrow as a spin $1/2$, the transfer matrix in the six-vertex representation, T_{6V} , acts on a quantum chain of $2L$ spins $1/2$. T_{6V} can be expressed in terms of generators of a Temperley-Lieb algebra, and therefore commutes with the generators of the quantum group $U_q(sl(2))$ [3]. In addition to S_z one can then define the total spin S (corresponding to the Casimir).

In this subsection we now follow [3] and define $K_{1,2l+1}$ as the trace of $(T_{6V})^N$ in the space of highest weights of spin $S = S_z = l$.⁶ With this definition, our goal is to decompose $K_{1,2l+1}$ in terms of the Z_{2j+1} , obtaining again Eq. (3.2), from which we shall conclude that the two definitions of $K_{1,2l+1}$ are equivalent.

To this end, we first remark that

$$K_{1,2l+1} = F_{2l+1} - F_{2(l+1)+1}, \quad (3.8)$$

where F_{2l+1} is the trace of $(T_{6V})^N$ on the space of *all* states of spin $S_z = l$. Indeed, the number of highest weight states of spin $S = S_z = l$ equals the number of states of spin $S_z = l$ minus the number of states of spin $S_z = l+1$. Therefore, we first decompose F_{2l+1} . The advantage of working with F_{2l+1} is that only S_z is specified, not S . Indeed, only S_z has a simple interpretation in the oriented loop representation: a basis of the space corresponding to $S_z = l$ is given simply by all states with a net arrow flux of l to the right, whereas the states with $S = S_z = l$ would be more complicated linear combinations of given spin configurations.

We now consider a configuration of oriented loops contributing to Z_{2j+1} , i.e., with $2j$ non-contractible loops. As the contractible loops do not contribute to S_z , there are no constraints on their orientations. Among the $2j$ non-contractible loops, $j+l$ (resp. $j-l$) must be oriented to the right (resp. left) in order to obtain $S_z = l$ (recall that

⁶Note that in this context, Eq. (2.8) follows by noting that each irreducible representation contains $2l+1$ states, which is replaced by the q -deformed number $(2l+1)_q$ on account of the twist.

For convenience in writing Eq. (3.10) we have defined $K_{1,2l+1}(L, N, x) \equiv 0$ for $l > L$. At the ferromagnetic critical point, and in the continuum limit, the quantities $\chi_{1,2l+1}$ become characters corresponding to primary fields of the unitary, minimal model $M_{p,p-1}$ with central charge $c = 1 - \frac{6}{p(p-1)}$. The many cancellations in Eq. (3.10) are linked to the existence of null vectors in the corresponding irreducible Verma modules. In fact, Eq. (3.10) is then nothing else than the Rocha-Caridi equation [8].

As in the case of the generic characters $K_{1,2l+1}$, the definition (3.10) of the minimal characters $\chi_{1,2l+1}$ is at finite size, and for any temperature x , but by analogy we shall still refer to $\chi_{1,2l+1}(L, N, x)$ as a minimal character.

It does not appear to be possible to compute the $\chi_{1,2l+1}$ directly in the cluster representation, i.e., otherwise than by first computing the corresponding $K_{1,2l'+1}$ and then applying Eq. (3.10). They can however be computed directly in an A_{p-1} type RSOS model [9] with specific boundary conditions [10].

Many, but not all, character decompositions of partition functions in terms of $K_{1,2l+1}$ turn into character decompositions in terms of $\chi_{1,2l+1}$ for p integer. This is the case for the total partition function, due to the symmetries

$$c^{(l)} = -c^{(p-1+np-l)} = c^{(np+l)}. \quad (3.11)$$

Therefore, using Eq. (2.6), one obtains [10]

$$Z = \sum_{l=0}^{\lfloor (p-2)/2 \rfloor} c^{(l)} \chi_{1,2l+1}. \quad (3.12)$$

Note that the sum contains less terms than before; in fact it is over those minimal characters that would be inside the Kac table at the ferromagnetic critical point [11].

On the other hand, the formula for the Z_{2j+1} , when the number of NTC is fixed to j , cannot in general be expressed in terms of the $\chi_{1,2l+1}$ for p integer. One interesting exception is for $j = 0$ (no NTC allowed) and p even. Using Eq. (3.5) one obtains

$$Z_1 = \sum_{l=0}^{\lfloor (p-2)/2 \rfloor} (-1)^l \chi_{1,2l+1} \quad (p \text{ even}). \quad (3.13)$$

This effect of parity in p is present in many other properties of the RSOS models [12].

4 Fixed transverse boundary conditions

Another constrained partition function whose character decomposition would be of interest is that of the Potts model on a cyclic lattice strip with *fixed* boundary conditions on the upper and lower horizontal row of Potts spins. It turns out to be easier to obtain the decomposition of a slightly modified object, namely the corresponding partition function on the dual lattice, with fixed boundary conditions on the two dual spins each of which lives on an exterior infinite face.

4.1 A modified model on the dual lattice

We consider therefore $\tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x})$, the partition function of the Potts model, defined on the lattice dual to the $L \times N$ cyclic strip considered in the preceding sections, evaluated at the dual temperature $\tilde{x} = 1/x$. For the sake of generality, any dual cluster which contains one (or both) exterior dual vertices has a weight of Q_0 instead of Q . Note that $Q_0 = 1$ corresponds to fixed boundary conditions on the two exterior dual spins. The case $Q_0 = Q$ is equivalent (under duality) to the free transverse boundary conditions considered above; we denote the corresponding dual partition function $\tilde{Z}(\tilde{x})$.

We search the character decomposition of $\frac{Q^{2-F}v^E}{Q_0}\tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x})$, where the prefactor is chosen so as to make the final result simpler. To achieve this goal, one needs first to convert the weights of the dual clusters into weights of direct clusters. Indeed, by duality a direct cluster configuration is in one-to-one correspondence with a dual cluster configuration [7], as shown in Fig. 4. To simplify the notation, we adopt the following convention: a dual cluster is called a *non-trivial cluster* (NTC) if it is non-contractible with respect to the periodic lattice direction, or if it contains one (or both) of the exterior dual spins. With this convention, a dual configuration with $j + 1$ dual NTC corresponds always to a direct configuration with j direct NTC. Note that there is always at least one dual NTC.

Given a cluster configuration, we denote by t the number of direct trivial (contractible) clusters, by \tilde{t} the number of dual trivial clusters, by b the number of direct

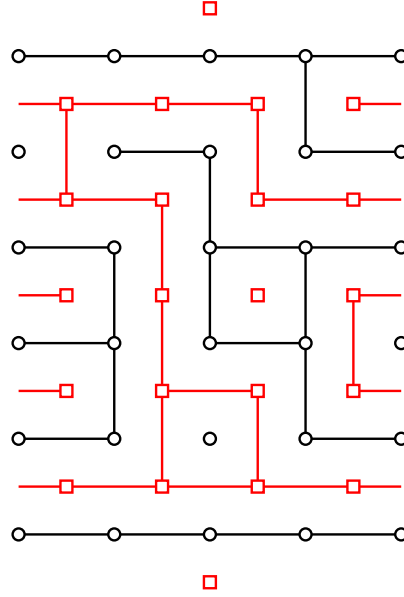


Figure 4: Direct and dual clusters corresponding to the configuration in Fig. 3. Direct (resp. dual) vertices are shown as black circles (resp. red squares). There are two direct NTC and three dual NTC (see text).

edges, and by \tilde{b} the number of dual edges. Consider now the weight of a configuration with $j + 1$ dual NTC in $\frac{Q^{2-F}v^E}{Q_0}\tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x})$. For $j \geq 1$ (resp. $j = 0$) this is $\frac{Q^{2-F}v^E}{Q_0}Q_0^2Q^{j-1}Q^{\tilde{t}}\tilde{v}^{\tilde{b}}$ (resp. $\frac{Q^{2-F}v^E}{Q_0}Q_0Q^{\tilde{t}}\tilde{v}^{\tilde{b}}$), since the two exterior dual vertices are contained in two different (resp. the same) dual NTC. We have here denoted the dual parameter $\tilde{v} = Q/v$.

To express these weights in terms of the direct quantities, we recall the fundamental duality relation [7] $Q^{1-F}v^E\tilde{Z}(\tilde{x}) = Z(x)$, valid because the lattice is planar. Translated into a relation on the weights of a single cluster configuration this reads

$$Q^{1-F}v^E Q^{j+1}Q^{\tilde{t}}\tilde{v}^{\tilde{b}} = Q^jQ^t v^b. \quad (4.1)$$

Therefore, the weight of a cluster configuration with j direct NTC reads $Q_0Q^{j-1}Q^t v^b$ if $j \geq 1$, and $Q^t v^b$ if $j = 0$. We thus deduce the following result: the weight of a direct cluster configuration in $\frac{Q^{2-F}v^E}{Q_0}\tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x})$ is the same as in $Z(x)$, except that for $j \geq 1$ direct NTC, one of the NTC has a weight Q_0 instead of Q .

4.2 $\tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x})$ in terms of $K_{1,2l+1}$

Let us recall that when inserting the development (2.8) of $c^{(l)}$ into Eq. (2.6) for Z , we have a geometrical interpretation for each term separately: from Eq. (3.3) the term in Q^j gives precisely Z_{2j+1} . Due to the result given after Eq. (4.1), we must now simply replace Q^j by $Q_0 Q^{j-1}$ for $j \geq 1$ and keep unchanged the term corresponding to $j = 0$. Therefore

$$\frac{Q^{2-F} v^E}{Q_0} \tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x}) = \sum_{l=0}^L b^{(l)} K_{1,2l+1}(x) \quad (4.2)$$

with the amplitudes

$$b^{(l)} = \frac{Q_0}{Q} c^{(l)} + (-1)^l \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) = (-1)^l + \sum_{j=1}^l (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q_0 Q^{j-1}. \quad (4.3)$$

Note that when $Q_0 = Q$, we recover $b^{(l)} = c^{(l)}$ as we should.

Just like in the case of free transverse boundary conditions, each power of Q in Eq. (4.2) can be interpreted separately as a partition function with a fixed number of NTC.

Let us consider a couple of limiting cases of Eq. (4.2). For $Q_0 \rightarrow 0$, $b^{(l)} = (-1)^l$ and therefore

$$\lim_{Q_0 \rightarrow 0} \left(\frac{Q^{2-F} v^E}{Q_0} \tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x}) \right) = \sum_{l=0}^L (-1)^l K_{1,2l+1}(x) = Z_1(x), \quad (4.4)$$

where we have used Eq. (3.5). We thus recover exactly the partition function with no direct NTC.

On the other hand, for $Q_0 \rightarrow \infty$, there is no $K_{1,1}$ in the expansion of $\frac{Q^{2-F} v^E}{Q_0} \tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x})$, i.e., $l = 0$ is forbidden. This is indeed expected, since in that limit there can be no dual cluster connecting the two exterior vertices, and therefore there is at least one direct NTC. Thus $j = 0$ is forbidden, and since $l \geq j$, we deduce that $l = 0$ is forbidden as well.

We now consider the case of p integer. Using Eqs. (4.3) and (3.11), we obtain that for p even

$$b^{(l)} = -b^{(p-1+np-l)} = b^{(np+l)}, \quad (4.5)$$

and we can write

$$\frac{Q^{2-F} v^E}{Q_0} \tilde{Z}_{Q_0}(\tilde{x}) = \sum_{l=0}^{\lfloor (p-2)/2 \rfloor} b^{(l)} \chi_{1,2l+1}(x) \quad (p \text{ even}). \quad (4.6)$$

Note finally that $b^{(1)} = Q_0 - 1$. This means that with fixed cyclic boundary conditions ($Q_0 = 1$) the term $l = 1$ drops out from the character decomposition. This fact has been exploited in a recent study of partition function zeroes of the RSOS models [13].

4.3 Square lattice model with $Q_0 = 1$

The case of $Q_0 = 1$ can be interpreted in the spin representation as having the same fixed value of the dual spins on the two exterior dual vertices. Alternatively, in the cluster picture, a dual cluster containing one or both exterior vertices has the weight 1 instead of Q .

Suppose now for simplicity that the direct lattice is a square lattice. The dual lattice is then a square lattice too, except for the two exterior vertices, each of which is equivalent to an extra line of spins all fixed in the same state. To make the equivalence perfect we should include an extra global factor of $\exp(2NJ)$, because of the interactions between spins inside each of the two extra lines (see Fig. 4). The dual lattice is thus equivalent to a square lattice of width $L + 1$ and of length N , with periodic boundary conditions along N and all the spins at the boundaries fixed to the same value. We denote the corresponding partition function $Z_{\text{ff}}(L + 1, N, x)$. Eq. (4.2) then reads explicitly

$$Z_{\text{ff}}(L, N, x) = \frac{\exp(2NJ)}{Q^{2-F} v^E} \sum_{l=0}^L b^{(l)} K_{1,2l+1}(L - 1, N, \tilde{x}). \quad (4.7)$$

Let us write out the explicit results for integer Q . For the Ising model ($Q = 2$ or $p = 4$) we have

$$Z_{\text{ff}}(L, N, x) = \frac{\exp(2NJ)}{2^{2-F} v^E} \chi_{1,1}(L - 1, N, \tilde{x}), \quad (4.8)$$

while for the three-state Potts model ($Q = 3$ or $p = 6$) we find

$$Z_{\text{ff}}(L, N, x) = \frac{\exp(2NJ)}{3^{2-F} v^E} (\chi_{1,1}(L - 1, N, \tilde{x}) + \chi_{1,5}(L - 1, N, \tilde{x})) \quad (4.9)$$

In the latter case, it is interesting to note that at the ferromagnetic critical point $\chi_{1,1} + \chi_{1,5}$ is nothing but the character of the identity operator with respect to the extended W_3 algebra [14].

5 Conclusion

We have explained in this paper how to decompose various constrained partition functions of the Potts model with cyclic boundary conditions in terms of the characters $K_{1,2l+1}$. These decompositions, whose origin is purely combinatorial, hold true in finite size, for any weakly regular lattice, and at any temperature x .

In particular we can decompose the ratios Z_{2j+1}/Z , which are the probabilities of having exactly j non-trivial clusters. While these probabilities are well-understood in the continuum limit, at the ferromagnetic critical point at least, our results shed more light on their fine structure, in particular regarding corrections to scaling.

Finally, we have seen that fixed transverse boundary conditions lead to the disappearance of the term with $l = 1$. Physically, one would expect the breaking of the S_Q permutation symmetry of the spin states induced by the fixed boundary conditions to simplify the structure of the complex-temperature phase diagram in the low-temperature phase. This expectation is indeed brought out in a recent numerical study [13].

Acknowledgments.

JLJ thanks the members of the SPhT, where part of this work was done, for their kind hospitality.

References

- [1] P.W. Kasteleyn and C.M. Fortuin, J. Phys. Soc. Jap. Suppl. **26**, 11 (1969); C.M. Fortuin and P.W. Kasteleyn, Physica **57**, 536 (1972).

- [2] J.-F. Richard and J.L. Jacobsen, *Character decomposition of Potts model partition functions. II. Toroidal geometry*, in preparation.
- [3] V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. B **330**, 523–556 (1989).
- [4] S.-C. Chang and R. Shrock, Physica A **347**, 314–352 (2005) [cond-mat/0404524].
- [5] J. Jacobsen and J. Salas J. Stat. Phys. **XXX**, XXX–XXX (2005) [cond-mat/0407444].
- [6] H.W.J. Blöte and M.P. Nightingale, Physica A **112**, 405–465 (1982).
- [7] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Academic Press, New York, 1982).
- [8] A. Rocha-Caridi, in S. Lepowski, S. Mandelstam and I.M. Singer (eds.), *Vertex operators in mathematics and physics*, MSRI Publications No. 3 (Springer, New York, 1985), p. 451.
- [9] V. Pasquier, J. Phys. A **20**, L1229 (1987).
- [10] H. Saleur and M. Bauer, Nucl. Phys. B **320**, 591 (1989).
- [11] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal field theory* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [12] J.-F. Richard and J.L. Jacobsen, Nucl. Phys. B **731**, 335–351 (2005) [math-ph/0507048].
- [13] J.L. Jacobsen, J.-F. Richard and J. Salas *Complex-temperature phase diagram of Potts and RSOS models*, cond-mat/0511059.
- [14] J. Cardy, Nucl. Phys. B **324**, 581 (1989).

Eigenvalue amplitudes of the Potts model on a torus

Jean-François Richard^{1,2} and Jesper Lykke Jacobsen^{1,3}

¹*Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques
Université Paris-Sud, Bât. 100, 91405 Orsay, France*

²*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies
Université Paris VI, Boîte 126, Tour 24, 5^{ème} étage
4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

³*Service de Physique Théorique
CEA Saclay, Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette, France*

August 25, 2006

Abstract

We consider the Q -state Potts model in the random-cluster formulation, defined on *finite* two-dimensional lattices of size $L \times N$ with toroidal boundary conditions. Due to the non-locality of the clusters, the partition function $Z(L, N)$ cannot be written simply as a trace of the transfer matrix T_L . Using a combinatorial method, we establish the decomposition $Z(L, N) = \sum_{l, D_k} b^{(l, D_k)} K_{l, D_k}$, where the characters $K_{l, D_k} = \sum_i (\lambda_i)^N$ are simple traces. In this decomposition, the amplitudes $b^{(l, D_k)}$ of the eigenvalues λ_i of T_L are labelled by the number $l = 0, 1, \dots, L$ of clusters which are non-contractible with respect to the transfer (N) direction, and a representation D_k of the cyclic group C_l . We obtain rigorously a general expression for $b^{(l, D_k)}$ in terms of the characters of C_l , and, using number theoretic results, show that it coincides with an expression previously obtained in the continuum limit by Read and Saleur.

1 Introduction

The Q -state Potts model on a graph $G = (V, E)$ with vertices V and edges E can be defined geometrically through the cluster expansion of the partition function [1]

$$Z = \sum_{E' \subseteq E} Q^{n(E')} (e^J - 1)^{b(E')}, \quad (1.1)$$

where $n(E')$ and $b(E') = |E'|$ are respectively the number of connected components (clusters) and the cardinality (number of links) of the edge subsets E' . We are interested in the case where G is a finite regular two-dimensional lattice of width L and length N , so that Z can be constructed by a transfer matrix T_L propagating in the N -direction.

In [2], we studied the case of cyclic boundary conditions (periodic in the N -direction and non-periodic in the L -direction). We decomposed Z into linear combinations of certain restricted partition functions (characters) K_l (with $l = 0, 1, \dots, L$) in which l *bridges* (that is, marked non-contractible clusters) wound around the transfer (N) direction. We shall often refer to l as the *level*. Unlike Z itself, the K_l could be written as (restricted) traces of the transfer matrix, and hence be directly related to its eigenvalues. It was thus straightforward to deduce from this decomposition the amplitudes in Z of the eigenvalues of T_L . The goal of this work is to repeat this procedure in the case of toroidal boundary conditions.

Note that as in the cyclic case some other procedures exist. First, Read and Saleur have given in [3] a general formula for the amplitudes, based on the earlier Coulomb gas analysis of Di Francesco, Saleur, and Zuber [4]. They obtained that the amplitudes of the eigenvalues are simply $b^{(0)} = 1$ at the level $l = 0$ and $b^{(1)} = Q - 1$ at $l = 1$. For $l \geq 2$ they obtained that, contrary to the cyclic case, there are several different amplitudes at each level l . Their number is equal to $q(l)$, the number of divisors of l . They are given by:

$$b^{(l,m)} = \Lambda(l, m; e_0) + (Q - 1) \Lambda\left(l, m; \frac{1}{2}\right), \quad (1.2)$$

where l is the level considered, and m is a divisor of l which labels the different amplitudes for a given level. Λ is defined as:

$$\Lambda(l, m; e_0) = 2 \sum_{d>0: d|l} \frac{\mu\left(\frac{m}{m \wedge d}\right) \phi\left(\frac{l}{d}\right)}{l \phi\left(\frac{m}{m \wedge d}\right)} \cos(2\pi d e_0). \quad (1.3)$$

Here, μ and ϕ are respectively the Möbius and Euler's totient function [5]. The Möbius function μ is defined by $\mu(n) = (-1)^r$, if n is an integer that is a product $n = \prod_{i=1}^r p_i$ of r *distinct* primes, $\mu(1) = 1$, and $\mu(x) = 0$ otherwise or if x is not an integer. Similarly, Euler's totient function ϕ is defined for positive integers n as the number of integers n' such that $1 \leq n' \leq n$ and $n \wedge n' = 1$. The value of e_0 depends on Q and is given by:

$$\sqrt{Q} = 2 \cos(\pi e_0) \quad (1.4)$$

Note that in Eq. (1.3) we may write $\cos(2\pi d e_0) = T_{2d}(\sqrt{Q}/2)$, where $T_n(x)$ is the n 'th order Chebyshev polynomial of the first kind. The term $(Q-1)\Lambda(l, m; \frac{1}{2})$ in Eq. (1.2) is due to configurations containing a cluster with “cross-topology” [3, 4] (see later).

The drawback of the derivation in Ref. [3] is that since it relies ultimately on free-field techniques it is *a priori* valid only at the usual ferromagnetic critical point ($J = J_c$) and in the continuum limit ($N, L \rightarrow \infty$). But one may suspect, in analogy with the cyclic case, that these amplitudes would be valid for any finite lattice and for any inhomogeneous (i.e., edge-dependent) values of the coupling constants J .

To our knowledge, no algebraic study proving this statement does exist in the literature. Indeed, when the boundary conditions are toroidal, the transfer matrix (of the related six-vertex model, to be precise) does no longer commute with the generators of the quantum group $U_q(sl(2))$. Therefore, there is no simple algebraic way of obtaining the amplitudes of eigenvalues, although some progress has been made by considering representations of the periodic Temperley-Lieb algebra. A good review is given by Nichols [7].

Chang and Shrock have studied the Potts model with toroidal conditions from a combinatorial point of view [6]. Using a diagrammatic approach they obtained some general results on the eigenvalue amplitudes. In particular, they showed that the sum of all amplitudes at level l equals

$$b^{(l)} \equiv \sum_{j=0}^l b_j^{(l)} = \begin{cases} \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \frac{2l}{l+j} \binom{l+j}{l-j} Q^j + (-1)^l (Q-1) & \text{for } l \geq 2 \\ \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l+j}{l-j} Q^j & \text{for } l \leq 2 \end{cases} \quad (1.5)$$

They also argued that it was because T_L enables permutations among the bridges, due to the periodic boundary conditions in the transverse (L) direction, that there were different amplitudes for a given level l . Without them, all the amplitudes at level l would be equal (to a global factor) to $b^{(l)}$. Finally, they computed explicitly the amplitudes at levels $l = 2$ and $l = 3$; one may check that those results are in agreement with Eq. (1.2).

Using the combinatorial approach we developed in [2], we will make the statements of Chang and Shrock more precise, and we will give in particular a new interpretation of the amplitudes using the characters of the cyclic group C_l . Then, by calculating sums of characters of irreducible representations (irreps) of this group, we will reobtain Eq. (1.2) and thus prove its validity for an arbitrary finite $L \times N$ lattice. As will become clear below, the argument relies exclusively on counting correctly the number of clusters with non-trivial homotopy, and so the conclusion will hold true for any edge-dependent choice of the coupling constants J as well.

Our approach will have to deal with several complications due to the boundary conditions, the first of which is that the bridges can now be permuted (by exploiting the periodic L -direction). In the following this leads us to consider decomposition of Z into more elementary quantities than K_l , namely characters $K_{l,P}$ labeled by l and a permutation of the cyclic group C_l . However, $K_{l,P}$ is not simply linked to the eigenvalues of T , and thus we will further consider its expansion over related quantities K_{l,D_k} , where D_k labels an irreducible representation (irrep) of C_l . It is K_{l,D_k} which are the elementary quantities in the case of toroidal boundary conditions.¹

The structure of the article is as follows. In section 2, we define appropriate generalisations of the quantities we used in the cyclic case [2] and we expose all the mathematical background we will need. Then, in section 3, we decompose restricted partition functions—and as a byproduct the total partition function—into characters K_l and $K_{l,P}$.

¹In a previous publication on the same subject [8] we have studied the decomposition in terms of the full symmetric group S_l . The present approach, using only the cyclic group C_l , is far simpler and for the first time allows us to prove Eq. (1.2). Note also that some misprints had cropped up in Ref. [8], giving in particular wrong results for the amplitudes at level $l = 4$.

Finally, in section 4, we obtain a general expression of the amplitudes of eigenvalues which involves characters of irreps of C_l . Using number theoretic results (Ramanujan sums) we then proceed to prove its equivalence with the formula (1.2) of Read and Saleur.

2 Algebraic preliminaries

2.1 Definition of the $Z_{j,n1,P}$

As in the cyclic case, the existence of a periodic boundary condition allows for non-trivial clusters (henceforth abbreviated NTC), i.e., clusters which are not homotopic to a point. However, the fact that the torus has *two* periodic directions means that the topology of the NTC is more complicated than in the cyclic case. Indeed, each NTC belongs to a given homotopy class, which can be characterised by two coprime numbers (n_1, n_2) , where n_1 (resp. n_2) denotes the number of times the cluster percolates horizontally (resp. vertically) [4]. The fact that all clusters (non-trivial or not) are still constrained by planarity to be non-intersecting induces a convenient simplification: all NTC in a given configuration belong to the same homotopy class. For comparison, we recall that in the cyclic case the only possible homotopy class for a NTC was $(n_1, n_2) = (1, 0)$.

It is a well-known fact [9, 10] that the difficulty in decomposing the Potts model partition function—or relating it to partition functions of locally equivalent models (of the six-vertex or RSOS type)—is due solely to the weighing of the NTC. Although a typical cluster configuration will of course contain trivial clusters (i.e., clusters that are homotopic to a point) with seemingly complicated topologies (e.g., trivial clusters can surround other trivial clusters, or be surrounded by trivial clusters or by NTC), we shall therefore tacitly disregard such clusters in most of the arguments that follow. Note also that a NTC that span both lattice directions² in the present context corresponds to

²Such a cluster was referred to as “degenerate” in Ref. [10], and as a cluster having “cross-topology” in Ref. [4].

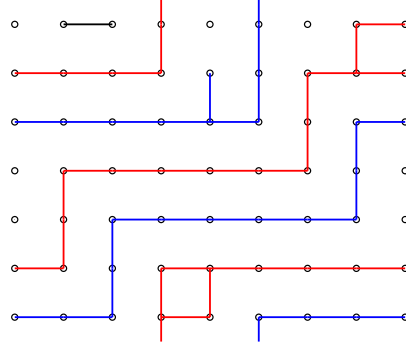


Figure 1: Cluster configuration with $j = 2$ non-trivial clusters (NTC), here represented in red and blue colours. Each NTC is characterised by its number of branches, $n_1 = 2$, and by the permutation it realises, $P = (12)$. Within a given configuration, all NTC have the same topology.

$$n_1 = 1.$$

Consider therefore first the case of a configuration having a single NTC. For the purpose of studying its topology, we can imagine that it has been shrunk to a line that winds the two periodic directions (n_1, n_2) times. In our approach we focus on the properties of the NTC along the direction of propagation of the transfer matrix T_L , henceforth taken as the horizontal direction. If we imagine cutting the lattice along a vertical line, the NTC will be cut into n_1 horizontally percolating parts, which we shall call the n_1 *branches* of the NTC. Seen horizontally, a given NTC realises a permutation P between the vertical coordinates of its n_1 branches, as shown in Fig. 1. Up to a trivial relabelling of the vertical coordinate, the permutation P is independent of the horizontal coordinate of the (imaginary) vertical cut, and so, forms part of the topological description of the NTC. We thus describe totally the topology along the horizontal direction of a NTC by n_1 and the permutation $P \in S_{n_1}$.

Note that there are restrictions on the admissible permutations P . Firstly, P cannot have any proper invariant subspace, or else the corresponding NTC would in fact correspond to several distinct NTC, each having a smaller value of n_1 . For example, the case $n_1 = 4$ and $P = (13)(24)$ is not admissible, as P corresponds in fact to two distinct NTC

with $n_1 = 2$. In general, therefore, the admissible permutations P for a given n_1 are simply cyclic permutations of n_1 coordinates. Secondly, planarity implies that the different branches of a NTC cannot intersect, and so not all cyclic permutations are admissible P . For example, the case $n_1 = 4$ and $P = (1324)$ is not admissible. In general the admissible cyclic permutations are characterised by having a constant coordinate difference between two consecutive branches, i.e., they are of the form $(k, 2k, 3k, \dots)$ for some constant k , with all coordinates considered modulo n_1 . For example, for $n_1 = 4$, the only admissible permutations are then finally (1234) and (1432) .³

Consider now the case of a configuration with several NTC. Recalling that all NTC belong to the same homotopy class, they must all be characterised by the same n_1 and P . Alternatively one can say that the branches of the different NTC are entangled. Henceforth we denote by j the number of NTC with $n_1 \geq 1$ in a given configuration. Note in particular that, seen along the horizontal direction, configurations with no NTC and configurations with one or more NTC percolating only vertically are topologically equivalent. This is an important limitation of our approach.

Let us denote by $Z_{j,n_1,P}$ the partition function of the Potts model on an $L \times N$ torus, restricted to configurations with exactly j NTC characterised by the index $n_1 \geq 1$ and the permutation $P \in S_{n_1}$; if P is not admissible, or if $n_1 j > L$, we set $Z_{j,n_1,P} = 0$. Further, let Z_{j,n_1} be the partition function restricted to configurations with j NTC of index n_1 , let Z_j be the partition function restricted to configurations with j NTC *percolating horizontally*, and let Z be the total partition function. Obviously, we have $Z_{j,n_1} = \sum_{P \in S_{n_1}} Z_{j,n_1,P}$, and $Z_j = \sum_{n_1=1}^L Z_{j,n_1}$, and $Z = \sum_{j=0}^L Z_j$. In particular, Z_0 corresponds to the partition function restricted to configurations with no NTC, or with NTC percolating only vertically.

³Note that we consider here the permutations that can be realised by a *single* cluster, not all the admissible permutations at a given level. We shall come back to this issue later (in Sec. 3.3) when we discuss in detail the attribution of “black points” to one or more different NTC. It will then be shown that the admissible permutations at level l correspond to the cyclic group C_l . For example, the admissible permutations at level $l = 4$ are Id, (1234) , $(13)(24)$ and (1432) .

In the case of a generic lattice all the $Z_{j,n_1,P}$ are non-zero, provided that P is an admissible cyclic permutation of length n_1 , and that $n_1 j \leq L$. The triangular lattice is a simple example of a generic lattice. Note however that other regular lattices may be unable to realise certain admissible P . For example, in the case of a square lattice or a honeycomb lattice, all $Z_{j,n_1,P}$ with $n_1 j = L$ and $n_1 > 1$ are zero, since there is not enough “space” on the lattice to permit all NTC branches to percolate horizontally while realising a non-trivial permutation. Such non-generic lattices introduce additional difficulties in the analysis which have to be considered on a case-to-case basis. In the following, we consider therefore the case of a generic lattice.

2.2 Structure of the transfer matrix

The construction and structure of the transfer matrix T can be taken over from the cyclic case [2]. In particular, we recall that T acts towards the right on states of connectivities between two time slices (left and right) and has a block-trigonal structure with respect to the number of *bridges* (connectivity components linking left and right) and a block-diagonal structure with respect to the residual connectivity among the non-bridged points on the left time slice. As before, we denote by T_l the diagonal block with a fixed number of bridges l and a trivial residual connectivity. Each eigenvalue of T is also an eigenvalue of one or more T_l . In analogy with [6] we shall sometimes call T_l the transfer matrix at level l . It acts on connectivity states which can be represented graphically as a partition of the L points in the right time slice with a special marking (represented as a *black point*) of precisely l distinct components of the partition (i.e., the components that are linked to the left time slice via a bridge).

A crucial difference with the cyclic case is that for a given partition of the right time slice, there are more possibilities for attributing the black points (for $0 < l < L$). Considering for the moment the black points to be indistinguishable, we denote the

corresponding dimension as $n_{\text{tor}}(L, l)$. It can be shown [6] that

$$n_{\text{tor}}(L, l) = \begin{cases} \frac{1}{L+1} \binom{2L}{L} & \text{for } l = 0 \\ \binom{2L-1}{L-1} & \text{for } l = 1 \\ \binom{2L}{L-l} & \text{for } 2 \leq l \leq L \end{cases} \quad (2.1)$$

and clearly $n_{\text{tor}}(L, l) = 0$ for $l > L$.

Suppose now that a connectivity state at level l is time evolved by a cluster configuration of index n_1 and corresponding to a permutation P . This can be represented graphically by adjoining the initial connectivity state to the left rim of the cluster configuration, as represented in Fig. 1, and reading off the final connectivity state as seen from the right rim of the cluster configuration. Evidently, the positions of the black points in the final state will be permuted with respect to their positions in the initial state, according to the permutation P . As we have seen, not all P are admissible. We will show in the subsection 3.3 that the possible permutations at a given level l (taking into account all the ways of attributing l black points to cluster configurations) are the elements of the cyclic group C_l .⁴the number of possible connectivity states without taking into account the possible permutations between black points, the dimension of T_l is $l n_{\text{tor}}(L, l)$, as C_l has l distinct elements.

Let us denote by $|v_{l,i}\rangle$ (where $1 \leq i \leq n_{\text{tor}}(L, l)$) the $n_{\text{tor}}(L, l)$ standard connectivity states at level l . The full space of connectivities at level l , i.e., with l distinguishable black points, can then be obtained by subjecting the $|v_{l,i}\rangle$ to permutations of the black points. It is obvious that T_l commutes with the permutations between black points (the physical reason being that T_l cannot “see” to which positions on the left time slice each bridge is attached). Therefore T_l itself has a block structure in a appropriate basis. Indeed, T_l can be decomposed into $T_{l,D}$ where $T_{l,D}$ is the restriction of T_l to the states transforming

⁴We proceed differently from Chang and Shrock [6] who considered the group S_l of all permutations at level l , not just the admissible permutations. Therefore the dimension of T_l they obtained was $l! n_{\text{tor}}(L, l)$. Although this approach is permissible (since in any case T_l will have zero matrix elements between states which are related by a non-admissible permutation) it is more complicated [8] than the one we present here.

according to the irreducible representation (irrep) D of C_l . Note that as C_l is a abelian group of l elements, it has l irreps of dimension 1. One can obtain the corresponding basis by applying the projectors p_D on all the connectivity states at level l , where p_D is given by

$$p_D = \frac{1}{l} \sum_P \bar{\chi}_D(P) P . \quad (2.2)$$

Here $\chi_D(P)$ is the character of P in the irrep D and $\bar{\chi}_D(P)$ is its complex conjugate. The application of all permutations of C_l on any given standard vector $|v_{l,i}\rangle$ generates a regular representation of C_l , which contains therefore once each representation D (of dimension 1). As there are $n_{\text{tor}}(L, l)$ standard vectors, the dimension of $T_{l,D}$ is thus simply $n_{\text{tor}}(L, l)$.⁵

2.3 Definition of the $K_{l,D}$

We now define, as in the cyclic case [2], K_l as the trace of $(T_l)^N$. Since T_l commutes with C_l , we can write

$$K_l = l \sum_{i=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} \langle v_{l,i} | (T_l)^N | v_{l,i} \rangle . \quad (2.3)$$

In distinction with the cyclic case, we cannot decompose the partition function Z over K_l because of the possible permutations of black points (see below). We shall therefore resort to more elementary quantities, the $K_{l,D}$, which we define as the trace of $(T_{l,D})^N$. Since both T_l and the projectors p_D commute with C_l , we have

$$K_{l,D} = l \sum_{i=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} \langle v_{l,i} | p_D (T_l)^N | v_{l,i} \rangle . \quad (2.4)$$

Obviously one has

$$K_l = \sum_D K_{l,D} , \quad (2.5)$$

⁵Note that if had considered the group S_l instead of C_l we would have had algebraic degeneracies, which would have complicated considerably the determination of the amplitudes of eigenvalues. In fact, it turns out that even by considering C_l there are degeneracies between eigenvalues of different levels, as noticed by Chang and Shrock [6]. But these degeneracies depend of the width L , and have no simple algebraic interpretation.

the sum being over all the l irreps D of C_l . Recall that in the cyclic case the amplitudes of the eigenvalues at level l are all identical. This is no longer the case, since the amplitudes depend on D as well. Indeed

$$K_{l,D} = \sum_{k=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} (\lambda_{l,D,k})^N . \quad (2.6)$$

In order to decompose Z over $K_{l,D}$ we will first use auxiliary quantities, the K_{l,P_l} defined as:

$$K_{l,P_l} = \sum_{i=1}^{n_{\text{tor}}(L,l)} \langle v_{l,i} | (P_l)^{-1} (T_l)^N | v_{l,i} \rangle , \quad (2.7)$$

P_l being an element of the cyclic group C_l . So K_{l,P_l} can be thought of as modified traces in which the final state differs from the initial state by the application of P_l . Note that $K_{l,\text{Id}}$ is simply equal to $\frac{K_l}{l}$. Because of the possible permutations of the black points, the decomposition of Z will contain not only the $K_{l,\text{Id}}$ but also all the other K_{l,P_l} , with $P_l \in C_l$. We will show that the coefficients before K_{l,P_l} coincide for all $P_l \in C_l$ that belong to the same class *with respect to the symmetric group S_l* .⁶ We will note these classes (d_i, n_1) (corresponding to a level $l = d_i n_1$) and it is thus natural to define $K_{(d_i, n_1)}$ as:

$$K_{(d_i, n_1)} = \sum_{P_l \in (d_i, n_1)} K_{l,P_l} , \quad (2.8)$$

the sum being over elements $P_l \in C_l$ belonging to the class (d_i, n_1) . This definition will enable us to simplify some formulas, but ultimately we will come back to the K_{l,P_l} .

Once we will obtain the decomposition of Z into K_{l,P_l} , we will need to express the K_{l,P_l} in terms of the $K_{l,D}$ to obtain the decomposition of Z into $K_{l,D}$, which are the quantities directly linked to the eigenvalues. Eqs. (2.4) and (2.2) yield a relation between $K_{l,D}$ and K_{l,P_l} :

$$K_{l,D} = \sum_{P_l} \chi_D(P_l) K_{l,P_l} . \quad (2.9)$$

These relations can be inverted so as to obtain K_{l,P_l} in terms of $K_{l,D}$, since the number of elements of C_l equals the number of irreps D of C_l . Multiplying Eq. (2.9) by $\bar{\chi}_D(P'_l)$

⁶Since C_l is an abelian group, each of its elements defines a class of its own, if the notion of class is taken with respect to C_l itself. What we need here is the non-trivial classes defined with respect to S_l .

and summing over D , and using the orthogonality relation $\sum_D \bar{\chi}_D(P_l) \chi_D(P'_l) = l \delta_{P_l, P'_l}$ one easily deduces that:

$$K_{l, P_l} = \sum_D \frac{\bar{\chi}_D(P_l)}{l} K_{l, D} \quad (2.10)$$

Note that

$$\sum_D \bar{\chi}_D(P_l) = l \delta_{P_l, \text{Id}} \quad (2.11)$$

2.4 Useful properties of the group C_l

In the following we will obtain an expression of the amplitudes at the level l which involves sums of characters of the irreps D of C_l . In order to reobtain Eq. (1.2), we will have to calculate these sums. We give here the results we shall need.

C_l is the group generated by the permutation $E_l = (12 \dots l)$. It is abelian and consists of the l elements $E_l^a = (E_l)^a$, with $1 \leq a \leq l$.⁷ The cycle structure of these elements is given by a simple rule. We denote by d_i (with $1 \leq i \leq q(l)$) the integer divisors of l (in particular $d_1 = 1$ and $d_{q(l)} = l$), and by A_{d_i} the set of integers which are a product of d_i by an integer n such that $1 \leq n \leq \frac{l}{d_i}$ and $n \wedge \frac{l}{d_i} = 1$.⁸ If $a \in A_{d_i}$ then E_l^a consists of d_i entangled cycles of the same length $\frac{l}{d_i}$. We denote the corresponding class $\left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)$. The number of elements of A_{d_i} , and so the number of such E_l^a , is equal to $\phi\left(\frac{l}{d_i}\right)$, where ϕ is Euler's totient function whose definition has been recalled in the introduction.⁹

Consider C_6 as an example. The elements of C_6 in the class $(1, 6)$ are $E_6 = (123456)$ and $E_6^5 = (165432)$. The elements in $(2, 3)$ are $E_6^2 = (135)(246)$ and $E_6^4 = (153)(264)$.¹⁰ There is only one element $E_6^3 = (14)(25)(36)$ in $(3, 2)$, and only $E_6^6 = \text{Id}$ in $(6, 1)$. Indeed, the integer divisors of 6 are 1, 2, 3, 6, and we have $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_6 = \{6\}$.

⁷With the chosen convention, the identity corresponds to $a = l$.

⁸Note that the union of all the sets A_{d_i} is $\{1, 2, \dots, l\}$.

⁹Note that $\sum_{d_i|l} \phi\left(\frac{l}{d_i}\right) = l$.

¹⁰Note that for example $(123)(456)$ is not an element of C_6 since it is not entangled.

C_l has l irreps denoted D_k , with $1 \leq k \leq l$. The corresponding characters are given by $\chi_{D_k}(E_l^a) = \exp(-i2\pi \frac{ka}{l})$.¹¹ We will have to calculate in the following the sums given by:

$$\sum_{P_l \in (d_i, \frac{l}{d_i})} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) = \sum_{a \in A_{d_i}} \exp\left(i2\pi \frac{ka}{l}\right). \quad (2.12)$$

These sums are slight generalizations of Ramanujan's sums.¹² Using Theorem 272 of Ref. [5], we obtain that:

$$\sum_{P_l \in (d_i, \frac{l}{d_i})} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) = \frac{\mu\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right) \phi\left(\frac{l}{d_i}\right)}{\phi\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right)}, \quad (2.13)$$

where k is supposed to be in A_d and m is given by $\frac{l}{d}$. The Möbius function μ has been defined in the Introduction. Note that all k which are in the same A_d lead to the same sum; we can therefore restrain ourselves to k equal to an integer divisor of l in order to have the different values of these sums. Indeed, we will label the different amplitudes at level l by m .

3 Decomposition of the partition function

3.1 The characters K_l

By generalising the working for the cyclic case, we can now obtain a decomposition of the K_l in terms of the Z_{j,n_1} . To that end, we first determine the number of states $|v_{l,i}\rangle$ which are *compatible* with a given configuration of Z_{j,n_1} , i.e., the number of initial states $|v_{l,i}\rangle$ which are thus that the action by the given configuration produces an identical final state. The notion of compatibility is illustrated in Fig. 2.

We consider first the case $n_1 = 1$ and suppose that the k 'th NTC connects onto the points $\{y_k\}$. The rules for constructing the compatible $|v_{l,i}\rangle$ are identical to those of the cyclic case:

¹¹With the chosen convention, the identity representation is denoted D_l .

¹²The case where the sum is over $a \in A_1$ corresponds exactly to a Ramanujan's sum.

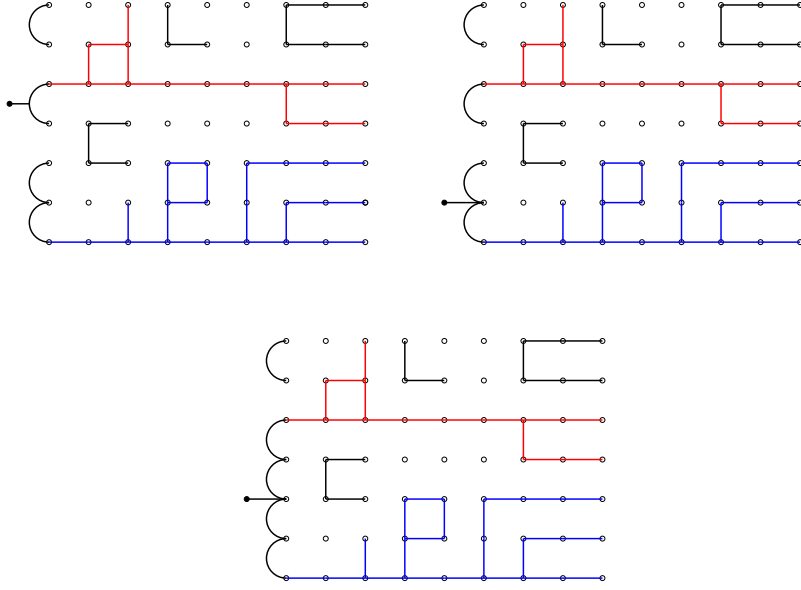


Figure 2: Standard connectivity states at level $l = 1$ which are compatible with a given cluster configuration contributing to $Z_{2,1}$.

1. The points $y \notin \cup_{k=1}^j \{y_k\}$ must be connected in the same way in $|v_{l,i}\rangle$ as in the cluster configuration.
2. The points $\{y_k\}$ within the same bridge must be connected in $|v_{l,i}\rangle$.
3. One can independently choose to associate or not a black point to each of the sets $\{y_k\}$. One is free to connect or not two distinct sets $\{y_k\}$ and $\{y_{k'}\}$.

The choices mentioned in rule 3 leave $n_{\text{tor}}(j, l)$ possibilities for constructing a compatible $|v_{l,i}\rangle$. The coefficient of $Z_{j,1}$ in the decomposition of K_l is therefore $\frac{l n_{\text{tor}}(j, l)}{Q^j}$, since the allowed permutation of black points in a standard vector $|v_{l,i}\rangle$ allows for the construction of l distinct states, and since the weight of the j NTC in K_l is 1 instead of Q^j . It follows that

$$K_l = \sum_{j=l}^L l n_{\text{tor}}(j, l) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} \quad \text{for } n_1 = 1. \quad (3.1)$$

We next consider the case $n_1 > 1$. Let us denote by $\{y_{k,m}\}$ the points that connect onto the m 'th branch of the k 'th NTC (with $1 \leq m \leq n_1$ and $1 \leq k \leq j$), and by

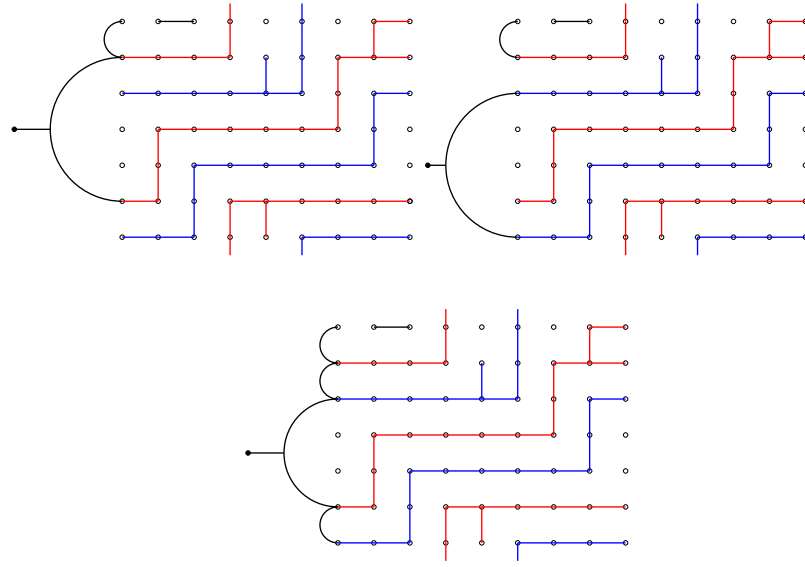


Figure 3: Standard connectivity states at level $l = 1$ which are compatible with a given cluster configuration contributing to $Z_{2,2}$.

$\{y_k\} = \cup_{m=1}^{n_1} \{y_{k,m}\}$ all the points that connect onto the k 'th NTC. As shown in Fig. 3, the $|v_{l,i}\rangle$ which are compatible with this configuration are such that

1. The connectivities of the points $y \notin \cup_{k=1}^j \{y_k\}$ are identical to those appearing in the cluster configuration.
2. All points $\{y_{k,m}\}$ corresponding to the branch of a NTC must be connected.
3. We must now count the number of ways we can link the branches of the k NTC and attribute l black points so that the connection *and the position of the black points* are unchanged after action of the cluster configuration. For $l \geq 2$, there are no compatible states (indeed it is not possible to respect planarity and to leave the position of the black points unchanged). For $l = 1$ and $l = 0$ there are respectively $\binom{2j-1}{j} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2j}{j}$ and $\binom{2j}{j}$ compatible states. Note that these results do not depend on the precise value of n_1 (for $n_1 > 1$).

The rule 3 implies that the decomposition of K_l with $l \geq 2$ does not contain any of the

Z_{j,n_1} with $n_1 > 1$. We therefore have simply

$$K_l = \sum_{j=l}^L l n_{\text{tor}}(j, l) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} \quad \text{for } l \geq 2. \quad (3.2)$$

The decomposition of K_1 and K_0 are given by:

$$K_1 = \sum_{j=1}^L n_{\text{tor}}(j, 1) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \frac{\binom{2j}{j}}{2} \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j} \quad (3.3)$$

$$K_0 = \sum_{j=0}^L n_{\text{tor}}(j, 0) \frac{Z_{j,1}}{Q^j} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \binom{2j}{j} \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j}. \quad (3.4)$$

Note that the coefficients in front of Z_{j,n_1} do not depend on the precise value of n_1 when $n_1 > 1$. To simplify the notation we have defined $Z_{0,1} = Z_0$.

3.2 The coefficients $b^{(l)}$

Since the coefficients in front of $Z_{j,1}$ and $Z_{j,n_1>1}$ in Eqs. (3.3)–(3.4) are different, we cannot invert the system of relations (3.2)–(3.4) so as to obtain $Z_j \equiv Z_{j,1} + Z_{j,n_1>1}$ in terms of the K_l . It is thus precisely because of NTC with several branches contributing to $Z_{j,n_1>1}$ that the problem is more complicated than in the cyclic case.

In order to appreciate this effect, and compare with the precise results that we shall find later, let us for a moment assume that Eq. (3.2) were valid also for $l = 0, 1$. We would then obtain

$$Z_{j,1} = \sum_{l=j}^L b_j^{(l)} \frac{K_l}{l}, \quad (3.5)$$

where the coefficients $b_j^{(l)}$ have already been defined in Eq. (1.5). The coefficients $b^{(l)}$ play a role analogous to those denoted $c^{(l)}$ in the cyclic case [2]; note also that $b^{(l)} = c^{(l)}$ for $l \leq 2$. Chang and Schrock have developed a diagrammatic technique for obtaining the $b^{(l)}$ [6].

Supposing still the unconditional validity of Eq. (3.2), one would obtain for the full partition function

$$Z = \sum_{l=0}^L b^{(l)} \frac{K_l}{l}. \quad (3.6)$$

This relation will be modified due to the terms $Z_{j,n_1>1}$ realising permutations of the black points, which we have here disregarded. To get things right we shall introduce irrep dependent coefficients $b^{(l,D)}$ and write $Z = \sum_{l=0}^L \sum_D b^{(l,D)} K_{l,D}$. Neglecting $Z_{j,n_1>1}$ terms would lead, according to Eq. (3.6), to $b^{(l,D)} = \frac{b^{(l)}}{l}$ independently of D . We shall see that the $Z_{j,n_1>1}$ will lift this degeneracy of amplitudes in a particular way, since there exist certain relations between the $b^{(l,D)}$ and the $b^{(l)}$.

In order to simplify the formulas we will obtain later, we define the coefficients $\tilde{b}^{(l)}$ for $l \geq 1$ by:

$$\tilde{b}^{(l)} = \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \frac{2l}{l+j} \binom{l+j}{l-j} Q^j + (-1)^l (Q-1). \quad (3.7)$$

For $l \geq 2$, $\tilde{b}^{(l)}$ is simply equal to $b^{(l)}$, they are different only for $l = 1$, as we have $b^{(1)} = Q - 1$ but $\tilde{b}^{(1)} = -1$. In order to reobtain the expression (1.2) of Read and Saleur for the amplitudes we will use that:

$$\tilde{b}^{(l)} = 2 \cos(2\pi l e_0) + (-1)^l (Q-1), \quad (3.8)$$

where e_0 has been defined in Eq. (1.4).

3.3 Decomposition of the K_{l,P_l}

The relations (3.2)–(3.4) were not invertible due to an insufficient number of elementary quantities K_l . Let us now show how to produce a development in terms of K_{l,P_l} , i.e., taking into account the possible permutations of black points. This development turns out to be invertible.

A standard connectivity state with l black points is said to be P_l -compatible with a given cluster configuration if the action of that cluster configuration on the connectivity state produces a final state that differs from the initial one just by a permutation P_l of the black points. This generalises the notion of compatibility used in Sec. 3.1 to take into account the permutations of black points.

Let us first count the number of standard connectivities $|v_{l,i}\rangle$ which are P_l -compatible with a cluster configuration contributing to $Z_{j,n_1,P}$. For $n_1 = 1$, S_{n_1} contains only the

identity element Id , and so the results of Sec. 3.1 apply: the $Z_{j,1}$ contribute only to $K_{l,\text{Id}}$. We consider next a configuration contributing to $Z_{j,n_1,P}$ with $n_1 > 1$. The $|v_{l,i}\rangle$ which are P_l -compatible with this configuration satisfy the same three rules as given in Sec. 3.1 for the case $n_1 > 1$, with the slight modification of rule 3 that the black points must be attributed in such a way that *the final state differs from the initial one by a permutation P_l* .

This modification makes the attribution of black points considerably more involved than was the case in Sec. 3.1. First note that not all the P_l are admissible. To be precise, the cycle decomposition of the allowed permutations can only contain P , as P is the permutation between the branches realised by a single NTC. Therefore the admissible permutations contain only P and are such that $l = d_i n_1$, denoting by d_i the number of times P is contained. We note (d_i, n_1) the corresponding classes of permutations and $K_{(d_i, n_1)}$ the corresponding K , see Eq. (2.8). Note that the number of classes of admissible permutations at a given level l is equal to the number of integers d_i dividing l , i.e. $q(l)$. Furthermore, inside these classes, not all permutations are admissible. Indeed, the entanglement of the NTC imply the entanglement of the structure of the allowed permutations. We deduce from all this rules that, as announced, the admissible permutations at level l are simply the elements of the cyclic group C_l .

Let us now consider the decomposition of K_{l,P_l} , which is depicted in Fig. 4, P_l being an authorized permutation different from identity and containing d_i times the permutation P of length n_1 . Then, only the $Z_{j,n_1,P}$, with $j \geq d_i$, contribute to the decomposition of K_{l,P_l} . We find that the number of $|v_{l,i}\rangle$ which are P_l -compatible with a given clusters configuration of $Z_{j,n_1,P}$ is $\binom{2j}{j-d_i}$.¹³ Therefore we have:

$$K_{l,P_l} = \sum_{j=d_i}^{\lfloor \frac{l}{n_1} \rfloor} \binom{2j}{j-d_i} \frac{Z_{j,n_1,P}}{Q^j}. \quad (3.9)$$

¹³Note that $\binom{2j}{j-d_i}$ is simply $n_{\text{tor}}(j, d_i)$ for $d_i \geq 2$ but is different for $d_i = 1$, see Eq. (2.1).

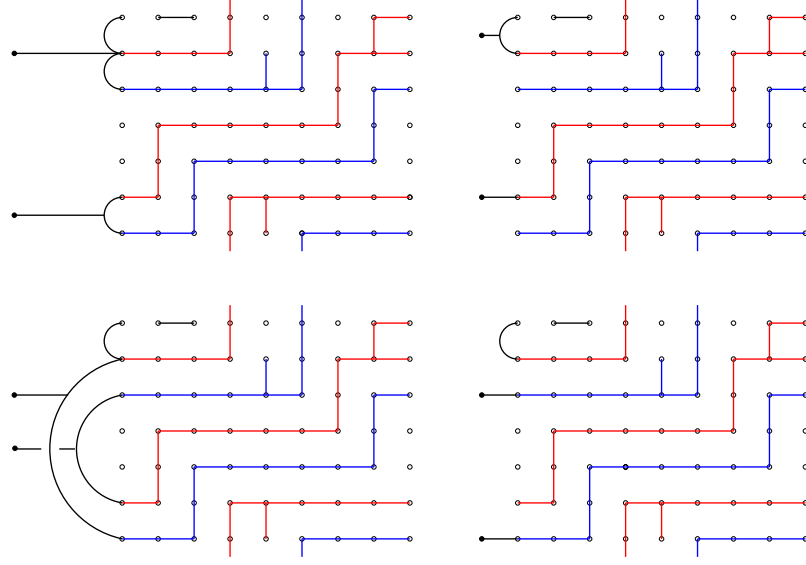


Figure 4: Standard connectivity states at level $l = 2$ which are (12)-compatible with a given cluster configuration contributing to $Z_{2,2}$. The action of the cluster configuration on these connectivity states permutes the positions of the two black points.

From this we infer the decomposition of $K_{(d_i, n_1)}$:

$$K_{(d_i, n_1)} = \sum_{j=d_i}^{\lfloor \frac{L}{n_1} \rfloor} \binom{2j}{j-d_i} \frac{Z_{j, n_1}}{Q^j}. \quad (3.10)$$

We will use the decomposition of $K_{(d_i, n_1)}$ in the following as it is simpler to work with Z_{j, n_1} than with $Z_{j, n_1, P}$ (but one could consider the $Z_{j, n_1, P}$ too).

It remains to study the special case of $P_l = \text{Id}$. This is in fact trivial. Indeed, in that case, the value of n_1 in Z_{j, n_1} is no longer fixed, and one must sum over all possible values of n_1 , taking into account that the case of $n_1 = 1$ is particular. Since $K_{l, \text{Id}} = \frac{K_l}{l}$, one obtains simply Eqs. (3.2)–(3.4) of Sec. 3.1 up to a global factor.

3.4 Decomposition of Z_j over the K_{l,P_l}

To obtain the decomposition of Z_{j,n_1} in terms of the K_{l,P_l} , we invert Eq. (3.10) for varying d_i and fixed $n_1 > 1$ and we obtain:

$$Z_{j,n_1} = Q^j \sum_{d_i=j}^{\lfloor \frac{L}{n_1} \rfloor} (-1)^{d_i-j} \frac{2d_i}{d_i+j} \binom{d_i+j}{d_i-j} K_{(d_i,n_1)} \quad \text{for } n_1 > 1. \quad (3.11)$$

Since the coefficients in this sum do not depend on n_1 (provided that $n_1 > 1$), we can sum this relation over n_1 and write it as

$$Z_{j,n_1>1} = Q^j \sum_{d_i=j}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^{d_i-j} \frac{2d_i}{d_i+j} \binom{d_i+j}{d_i-j} K_{(d_i,n_1>1)} \quad (3.12)$$

where we recall the notations $Z_{j,n_1>1} = \sum_{n_1=2}^L Z_{j,n_1}$ and $K_{(d_i,n_1>1)} = \sum_{n_1=2}^L K_{(d_i,n_1)}$, corresponding to permutations consisting of d_i cycles of the same length > 1 .

Consider next the case $n_1 = 1$. For $j \geq 2$ one has simply

$$Z_{j,1} = \sum_{l=j}^L \frac{b_j^{(l)}}{l} K_l, \quad (3.13)$$

recalling Eq. (3.5) and the fact that for $l \geq 2$ the $Z_{j,n_1>1}$ do not appear in the decomposition of K_l . However, according to Eqs. (3.3)–(3.4), the $Z_{j,n_1>1}$ do appear for $l = 0$ and $l = 1$, and one obtains

$$Z_{1,1} = \sum_{l=1}^L \frac{b_1^{(l)}}{l} K_l - \frac{Q}{2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \binom{2j}{j} \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j}. \quad (3.14)$$

Inserting the decomposition (3.12) of $Z_{j,n_1>1}$ into Eq. (3.14) one obtains the decomposition of $Z_{1,1}$ over K_l and $K_{(d_i,n_1)}$:

$$Z_{1,1} = \sum_{l=1}^L \frac{b_1^{(l)}}{l} K_l + Q \sum_{d_i=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^{d_i} K_{(d_i,n_1>1)}. \quad (3.15)$$

We proceed in the same fashion for the decomposition of $Z_0 \equiv Z_{0,1}$, finding

$$Z_0 = \sum_{l=0}^L \frac{b_0^{(l)}}{l} K_l - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \binom{2j}{j} \frac{Z_{j,n_1>1}}{Q^j}. \quad (3.16)$$

Upon insertion of the decomposition (3.12) of $Z_{j,n_1>1}$, one arrives at

$$Z_0 = \sum_{l=0}^L \frac{b_0^{(l)}}{l} K_l + \sum_{d_i=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^{d_i} K_{(d_i, n_1>1)} . \quad (3.17)$$

Since $Z_j = Z_{j,1} + Z_{j,n_1>1}$, we conclude from Eqs. (3.13)–(3.12) and from Eq. (3.7) that, for any j ,

$$Z_j = \sum_{l=j}^L \frac{b_j^{(l)}}{l} K_l + \sum_{d_i=j}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \tilde{b}_j^{(d_i)} K_{(d_i, n_1>1)} . \quad (3.18)$$

The decomposition of $Z \equiv \sum_{0 \leq j \leq L} Z_j$ is therefore

$$Z = \sum_{l=0}^L \frac{b^{(l)}}{l} K_l + \sum_{d_i=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \tilde{b}^{(d_i)} K_{(d_i, n_1>1)} . \quad (3.19)$$

4 Amplitudes of the eigenvalues

4.1 Decomposition of Z over the $K_{l,D}$

The culmination of the preceeding section was the decomposition (3.18) of Z_j in terms of K_{l,P_l} (as $K_{(d_i, n_1)}$ is the sum of the K_{l,P_l} with P_l being an element of C_l belonging to the class (d_i, n_1)). However, it is the $K_{l,D}$ which are directly related to the eigenvalues of the transfer matrix T . For that reason, we now use the relation (2.10) between the K_{l,P_l} and the K_{l,D_k} to obtain the decomposition of Z_j in terms of K_{l,D_k} . The result is:

$$Z_j = \sum_{l, D_k} b_j^{(l, D_k)} K_{l, D_k} \quad (4.1)$$

where the coefficients $b_j^{(l, D_k)}$ are given by

$$b_j^{(l, D_k)} = \frac{b_j^{(l)}}{l} + \sum_{(d_i < l) | l} \frac{\tilde{b}_j^{(d_i)}}{l} \sum_{P_l \in (d_i, \frac{l}{d_i})} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) . \quad (4.2)$$

Indeed, $K_l = \sum_{D_k} K_{l, D_k}$, and since $K_{(d_i, n_1)}$ corresponds to the level $l = d_i n_1$, we have $K_{(d_i, n_1)} = \sum_{D_k \in C_{d_i n_1}} \frac{\bar{\chi}_{D_k}((d_i, n_1))}{l} K_{d_i n_1, D_k}$. (Recall that (d_i, n_1) is the class of permutations

consisting of d_i cycles of the same length $n_1 = \frac{l}{d_i}$.) As explained in Sec. 3.2, the $b_j^{(l, D_k)}$ are not simply equal to $\frac{b_j^{(l)}}{l}$ because of the $n_1 > 1$ terms. Using Eq. (2.11) we find that they nevertheless obey the following relation

$$\sum_{D_k \in C_l} b_j^{(l, D_k)} = b_j^{(l)} . \quad (4.3)$$

But from Eq. (4.2) the $b_j^{(l, D_k)}$ with $l < 2j$ are trivial, i.e., equal to $\frac{b_j^{(l)}}{l}$ independently of D . This could have been shown directly by considering the decomposition (3.2) of K_l .

The decomposition of Z over K_{l, D_k} is obviously given by

$$Z = \sum_{l, D_k} b^{(l, D_k)} K_{l, D_k} \quad (4.4)$$

where

$$b^{(l, D_k)} = \sum_{j=1}^l b_j^{(l, D_k)} , \quad (4.5)$$

i.e.

$$b^{(l, D_k)} = \frac{b^{(l)}}{l} + \sum_{(d_i < l) | l} \frac{\tilde{b}^{(d_i)}}{l} \sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) . \quad (4.6)$$

This is the central result of our article: we have obtained a rather simple expression of the amplitudes $b^{(l, D)}$ in terms of the characters of the irrep D . A priori, for a given level l , there should be l distinct amplitudes $b^{(l, D)}$ because C_l has l distinct irreps D . However, because of the fact that two different permutations in the same class $\left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)$ correspond to the same coefficient $\tilde{b}^{(d_i)}$, there are less distinct amplitudes: some $b^{(l, D)}$ are the same. Indeed, the Eq. (4.6) giving the amplitudes of the eigenvalues contains generalized Ramanujan's sum, so using the subsection 2.4, the D_k whose k are in the same A_d correspond to the same amplitude $b^{(l, D_d)}$. For example, at level 6, there are only four distinct amplitudes: $b^{(6, D_1)}$, $b^{(6, D_2)}$, $b^{(6, D_3)}$ and $b^{(6, D_6)}$, since we have $b^{(6, D_1)} = b^{(6, D_5)}$ and $b^{(6, D_2)} = b^{(6, D_4)}$.

An important consequence of the expression of the $b^{(l, D_k)}$ is that they satisfy

$$\sum_{D_k \in C_l} b^{(l, D_k)} = b^{(l)} , \quad (4.7)$$

i.e., the sum of the l (not necessarily distinct) amplitudes $b^{(l,D_k)}$ at level l is equal to $b^{(l)}$. This has been previously noted by Chang and Shrock [6], except that they stated it was the sum of $l!$ amplitudes, not l , as they did not notice that only permutations in the cyclic group C_l were admissible.

Note also that for $l \geq 2$, Eq. (4.6) can be written more simply as:

$$b^{(l,D_k)} = \sum_{d_i|l} \frac{\tilde{b}^{(d_i)}}{l} \sum_{P_l \in \left(d_i, \frac{l}{d_i}\right)} \bar{\chi}_{D_k}(P_l) , \quad (4.8)$$

since $b^{(l)} = \tilde{b}^{(l)}$ for $l \geq 2$. We now restrict ourselves to this case, as the amplitudes at levels 0 and 1 are simply $b^{(0)} = 1$ and $b^{(1)} = Q - 1$.

4.2 Compact formula for the amplitudes

We now calculate the Ramanujan's sums appearing in Eq. (4.8). Using Eq. (2.13), we obtain:

$$b^{(l,m)} = \sum_{d_i|l} \frac{\mu\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right) \phi\left(\frac{l}{d_i}\right)}{l \phi\left(\frac{m}{m \wedge d_i}\right)} \tilde{b}^{(d_i)} . \quad (4.9)$$

Remember that m is given by $\frac{l}{d}$ for k in the set A_d , and so is an integer divisor of l . Using the expression of the $\tilde{b}^{(d_i)}$ given in Eq. (3.8), we finally recover the formula (1.2) of Read and Saleur. In particular, the term $(-1)^l(Q-1)$ in the definition (3.7) of $\tilde{b}^{(l)}$ corresponds to degenerate cluster configurations.

Note that the number of different amplitudes at level l is simply equal to the number of integer divisors of l . In particular, when l is prime, there are only two different amplitudes: $b^{(l,1)}$ which corresponds to $b^{(l,D_l)}$ (D_l is the identity representation) and $b^{(l,l)}$ which corresponds to the $l-1$ other $b^{(l,D_k)}$ (as they are all equal). Using that $b^{(1)} = -1$, we find:

$$b^{(l,1)} = \frac{b^{(l)} - l + 1}{l} \quad (4.10)$$

$$b^{(l,l)} = \frac{b^{(l)} + 1}{l} . \quad (4.11)$$

This could have been simply directly showed using Eq. (4.8). Indeed, for l prime, C_l contains Id and $l - 1$ cycles of length l . As $b^{(1)} = -1$, we deduce that $b^{(l,1)} = \frac{b^{(l)} - l + 1}{l}$. For $b^{(l,l)}$, one needs just use that $\sum_{k=1}^{l-1} \exp\left(\frac{i2\pi k}{l}\right) = -1$.

5 Conclusion

To summarise, we have generalised the combinatorial approach developed in Ref. [2] for cyclic boundary conditions to the case of toroidal boundary conditions. In particular, we have obtained the decomposition of the partition function for the Potts model on finite tori in terms of the generalised characters $K_{l,D}$. We proved that the formula (1.2) of Read and Saleur is valid for any finite lattice, and for any inhomogeneous choice of the coupling constants. Furthermore, our physical interpretation of this formula is new and is based on the cyclic group C_l .

The eigenvalue amplitudes are instrumental in determining the physics of the Potts model, in particular in the antiferromagnetic regime [11, 12]. Generically, this regime belongs to a so-called Berker-Kadanoff (BK) phase in which the temperature variable is irrelevant in the renormalisation group sense, and whose properties can be obtained by analytic continuation of the well-known ferromagnetic phase transition [11]. Due to the Beraha-Kahane-Weiss (BKW) theorem [13], partition function zeros accumulate at the values of Q where either the amplitude of the dominant eigenvalue vanishes, or where the two dominant eigenvalues become equimodular. When this happens, the BK phase disappears, and the system undergoes a phase transition with control parameter Q . Determining analytically the eigenvalue amplitudes is thus directly relevant for the first of the hypotheses in the BKW theorem.

For the cyclic geometry, the amplitudes are very simple, and the real values of Q satisfying the hypothesis of the BKW theorem are simply the so-called Beraha numbers, $Q = B_n = (2 \cos(\pi/n))^2$ with $n = 2, 3, \dots$, independently of the width L . For the toroidal case, the formula is more complicated, and there can be degeneracies of eigenvalues between different levels which depend on the width L of the lattice, as shown by Chang

and Shrock [6]. The role of the Beraha numbers will therefore be considered in a future work.

Acknowledgments.

The authors are grateful to H. Saleur, J.-B. Zuber and P. Zinn-Justin for some useful discussions. We also thank J. Salas for collaboration on closely related projects.

References

- [1] P.W. Kasteleyn and C.M. Fortuin, J. Phys. Soc. Jap. Suppl. **26**, 11 (1969); C.M. Fortuin and P.W. Kasteleyn, Physica **57**, 536 (1972).
- [2] J.-F. Richard and J.L. Jacobsen, Nucl. Phys. B **750**, 250–264 (2006); math-ph/0605016.
- [3] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B **613**, 409 (2001); hep-th/0106124.
- [4] P. Di Francesco, H. Saleur and J.B. Zuber, J. Stat. Phys. **49**, 57 (1987).
- [5] G. H. Hardy and E. M. Wright *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford Science Publications, New York, 1979).
- [6] S.-C. Chang and R. Shrock, Physica A **364**, 231–262 (2006); cond-mat/0506274.
- [7] A. Nichols, J. Stat. Mech. **0601**, 3 (2006); hep-th/0509069.
- [8] J.-F. Richard and J.L. Jacobsen, Nucl. Phys. B **750**, 229–249 (2006); math-ph/0605015.
- [9] V. Pasquier, J. Phys. A **20**, L1229 (1987).
- [10] J.-F. Richard and J.L. Jacobsen, Nucl. Phys. B **731**, 335 (2005); math-ph/0507048.
- [11] H. Saleur, Commun. Math. Phys. **132**, 657 (1990); Nucl. Phys. B **360**, 219 (1991).
- [12] J.L. Jacobsen and H. Saleur, Nucl. Phys. B **743**, 207 (2006); cond-mat/0512056.

- [13] S. Beraha, J. Kahane and N.J. Weiss, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **72**, 4209 (1975).

Résumé

Le modèle de Potts permet de décrire le comportement des corps ferromagnétiques, en les considérant comme des spins à Q états situés sur un réseau et interagissant entre eux. Il est relié à beaucoup de problèmes usuels en physique statistique et en mathématiques, par exemple la percolation ou le coloriage de réseaux. Dans cette thèse, nous nous restreignons au cas d'un réseau bidimensionnel, et nous pouvons ainsi utiliser les résultats d'invariance conforme lorsque le système est critique. Afin d'étudier son diagramme de phase, nous décomposons la fonction de partition en caractères, pour différentes conditions aux limites, en utilisant la théorie de représentation du groupe quantique $U_q(sl(2))$ ainsi que des méthodes combinatoires. Ensuite, nous déterminons numériquement les zéros limites de la fonction de partition dans le plan de température complexe, et conjecturons des propriétés du diagramme de phase. En particulier, on montre que la phase de Berker-Kadanoff disparaît lorsque Q est égal à un nombre de Beraha, et que de nouveaux points fixes apparaissent.

mots-clés : modèle de Potts, invariance conforme, phase de Berker-Kadanoff, représentation en amas, groupe quantique, nombre de Beraha

Abstract

The Potts model describes the behaviour of ferromagnetics, by modelizing them as interacting spins with a number Q of states, located on a lattice. It is linked to many well-known problems in statistical physics and mathematics, as for example percolation or lattice colouring. In this thesis, we restrict ourselves to the case of a two-dimensional lattice, so we can use results of conformal invariance when the system is critical. In order to study its phase diagram, we decompose the partition function into characters for different boundary conditions, using the theory of representation of the quantum group $U_q(sl(2))$ and combinatorial methods. Then we determine numerically the limiting zeroes of the partition function in the complex temperature plane, and we conjecture properties of the phase diagram. In particular we show that the Berker-Kadanoff phase is not present when Q is equal to a Beraha number, and that new fixed points emerge.

keywords : Potts model, conformal invariance, Berker-Kadanoff phase, cluster representation, quantum group, Beraha number